Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ С РЕШЕНИЯМИ

Т.А. ЛЕОНТЬЕВА
А.В. ДОМРИНА

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ С РЕШЕНИЯМИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Рекомендовано в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки «Физико-математические науки», а также технических и педагогических вузов

Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту 3-го поколения

Москва
ИНФРА-М
2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособии представлены задачи по темам, обычно входящим в курсы теории функций действительного переменного и функционального анализа, читаемые на факультетах математического и физического профилей в университетах. Теория действительного переменного отражена в разделах: элементы теории множеств, мера Лебега и измеримые функции, интеграл Лебега и пространства L_p, тригонометрические ряды и преобразование Фурье. Курс функционального анализа представлен задачами, относящимися к основным линейным пространствам: метрическим, топологическим, нормированным и гильбертовым, а также к линейным функционалам и операторам. Последняя глава задачника содержит начальные сведения об обобщенных функциях.

Сборник задач состоит из 11 глав и содержит более 300 задач. В начале каждой главы содержится теоретический материал, состоящий из определений и формулировок теорем, используемых в этой главе. Все задачи даны с решениями и ответами. Задачи в главах в основном расположены в порядке возрастания трудности.

Так как курс функционального анализа на факультете ВМиК традиционно читается на 3 или 4 курсе, то данная книга прежде всего будет полезна студентам 3 и 4 курсов факультета ВМиК МГУ, тем более число практических занятий по курсам теории функций и функционального анализа очень мало. Издание также будет полезно студентам, аспирантам и преподавателям естественных факультетов университетов, а также технических и педагогических вузов. В конце издания приведен список литературы, рекомендуемой для лучшего усвоения курса функционального анализа. Компьютерный набор рукописи сделан А.В. Домриной. Подбор задач и составление решений в главах I-IV осуществлены Т.А. Леонтьевой, а в главах V-XI — А.В. Домриной. Условия большинства задач взяты из задачников:

1. Т.А. Леонтьева "Сборник задач по теории функций действительного переменного", изд. МГУ, 1978 г.

2. Т.А. Леонтьева "Сборник задач — Введение в функциональный анализ", изд. МГУ, 1978 г.

3. Т.А. Леонтьева, В.С. Панферов, В.С. Серов "Задачи по теории функций действительного переменного", изд. МГУ, 1997 г.

Авторы выражают благодарность рецензентам: чл.-корр. РАН профессору ВМК МГУ И.А. Шишмареву и профессору механико-математического факультета МГУ В.В. Власову за труд прочтения рукописи и ценные замечания.

ГЛАВА I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§1. Операции над множествами.

Объединением множеств A и B называется множество C (обозначается $C = A \cup B$), состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B. Множество C называется объединением множеств A_α, где α пробегает множество индексов I, и обозначается $C = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$, если оно состоит из всех таких элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_α, т.е.

$$x \in C \iff \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha.$$

Пересечением множеств A и B называется множество C (обозначается $C = A \cap B$), состоящее из элементов, которые принадлежат каждому из множеств A и B. Множество C называется пересечением множеств A_α, где α пробегает множество индексов I, и обозначается $C = \cap_{\alpha \in I} A_\alpha$, если оно состоит из всех таких элементов, которые принадлежат каждому множеству A_α, т.е.

$$x \in C \iff \forall \alpha \in I : x \in A_\alpha.$$

Операции объединения и пересечения множеств обладают следующими свойствами:

1)*коммутативность*

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A;$$

2)*ассоциативность*

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

3)*дистрибутивность*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Разностью множеств A и B называется множество C (обозначается $A \setminus B$), состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Симметрической разностью множеств A и B называется множество $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Если множество A является подмножеством множества B (обозначается $A \subset B$), то множество $B \setminus A$ называется *дополнением множества A до B* и обозначается $C_B A$ или CA. В этом случае удобно также ввести *характеристическую функцию* множества A в множестве B

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \in C_B A. \end{cases}$$

Декартовым произведением множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется множество, состоящее из упорядоченных наборов n элементов $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, $\dots$, $x_n \in A_n$. Это множество обозначантся символом $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Непустое семейство множеств K называется *полукольцом*, если оно содержит пустое множество и для любых $A, B \in K$ справедливы утверждения:

1) $A \cap B \in K$;

2) $\exists C_1, \dots, C_n \in K : C_i \cap C_j = \emptyset, i \neq j$ и $A \setminus B = \cup_{j=1}^{n} C_j$.

Непустое семейство множеств K называется *кольцом*, если оно содержит пустое множество и для любых $A, B \in K$ следует $A \Delta B \in K$ и $A \cap B \in K$. Если K — кольцо и $A, B \in K$, то $A \cup B \in K$, следовательно объединение любого конечного числа множеств из K содержится в K. Кольцо K называется *σ-кольцом*, если для любой последовательности множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in K$ объединение $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ также содержится в K. Кольцо K называется *δ-кольцом*, если для любой последовательности множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in K$ пересечение $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ также содержится в K.

Множество E называется *единицей* некоторой системы множеств S, если $E \in S$ и для любого множества $A \in S$ следует $A \cap E = A$. Кольцо множеств с единицей называется *алгеброй*, σ-кольцо множеств с единицей называется *σ-алгеброй*, δ-кольцо множеств с единицей называется *δ-алгеброй*.

Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность множеств. *Верхним пределом* последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множество

$$\overline{\lim} A_n = \cap_{k=1}^{\infty} (\cup_{n=k}^{\infty} A_n),$$

нижним пределом последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется множество

$$\underline{\lim} A_n = \cup_{k=1}^{\infty} (\cap_{n=k}^{\infty} A_n).$$

Последовательность множеств называется *сходящейся*, если $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$. В этом случае пределом последовательности называется множество

$$\lim A_n = \overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n.$$

§2. Отображение множеств. Понятие мощности множеств.

Пусть заданы множества A и B и по некоторому закону f каждому элементу $x \in A$ однозначно ставится в соответствие некоторый элемент $y \in B$, называемый *образом элемента x при отображении f*, и обозначаемый $f(x)$. *Графиком Γ_f отображения f* называется множество, принадлежащее $A \times B$, такое что

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)), x \in A\}.$$

Образом множества A при отображении f называется множество

$$f(A) = \{y = f(x) : x \in A\}.$$

Если $y \in f(A)$, то множество

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$$

называется *полным прообразом* элемента y при отображении f. Если $y \in B \setminus f(A)$, полагаем $f^{-1}(y) = \emptyset$. *Полным прообразом множества* C называется множество

$$f^{-1}(C) = \cup_{y \in C} f^{-1}(y).$$

Отображение $f : A \to B$ называется

1) сюрьективным, если $f(A) = B$;

2) инъективным, если для любых различных элементов $x_1, x_2 \in A$, справедливо $f(x_1) \neq f(x_2)$;

3) биективным, или взаимно однозначным, если оно сюрьективно и инъективно.

Композицией отображений $f : A \to B$ и $g : B \to C$ называется отображение $h : A \to C$, такое что $h(x) = g(f(x))$, $x \in A$. При этом пишут $h = g \circ f$.

Множество A *равномощно, или эквивалентно* множеству B ($A \sim B$), если существует биективное отображение $f : A \to B$. Справедливы следующие свойства эквивалентных множеств:

1) $A \sim A$;

2) $A \sim B \iff B \sim A$;

3) Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Таким образом, все множества распадаются на непересекающиеся классы эквивалентности. Будем говорить, что множества, принадлежащие одному классу эквивалентности, имеют одинаковую мощность. Мощность множества A будем обозначать $\overline{\overline{A}}$. Если A и B — конечные множества, то они имеют одинаковую мощность тогда и только тогда, когда имеют одинаковое число элементов.

Множество A называется счетным, если $A \sim \mathbf{N}$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел. Множество имеет мощность континуума, если $A \sim [0, 1]$. Мощность континуума обозначается символом c.

Пусть множества A и B имеют мощности $\overline{\overline{A}}$ и $\overline{\overline{B}}$ соответственно. Если множества A и B не эквивалентны, но $\exists B_1 \subset B : A \sim B_1$, то мы считаем, что $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. Справедливы следующие утверждения:

Утверждение 1. *Пусть A, A_1 и A_2 — множества, причем $A_2 \subset A_1 \subset A$ и $A_2 \sim A$. Тогда $A_1 \sim A$.*

Утверждение 2 (теорема Кантора-Бернштейна). *Пусть A и B — множества, $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, $A \sim B_1$ и $B \sim A_1$. Тогда $A \sim B$.*

Пусть множество A имеет мощность μ. Тогда мощность множества всех подмножеств множества A обозначается 2^μ. Справедливо неравенство $\mu < 2^\mu$.

Для мощности a счетного множества и мощности c континуума справедливо равенство $2^a = c$. Отсюда следует, что множество всех подмножеств натурального ряда равномощно сегменту $[0, 1]$. Мощность множества всех подмножеств сегмента $[0, 1]$ называется гиперконтинуум.

Через $\mathbf{Q}$, как обычно, обозначим множество рациональных чисел, через $\mathbf{R}$ — множество вещественных чисел. Множество $\mathbf{Q}$ счетно, множество $\mathbf{R}$ имеет мощность континуума.

Задачи

§1. Операции над множествами.

1.1. Пусть $I = \{\alpha\}$ — произвольное множество индексов. Доказать равенства:

$$1.(\cup_{\alpha\in I}A_\alpha)\cap A = \cup_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap A);$$

$$2.(\cap_{\alpha\in I}A_\alpha)\cup A = \cap_{\alpha\in I}(A_\alpha\cup A).$$

Решение. Докажем первое равенство. Пусть $x \in A\cap(\cup_{\alpha\in I}A_\alpha)$. Тогда $x\in A$ и $x\in A_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0\in I$. Поэтому $x\in A\cap A_{\alpha_0}\subset \cup_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap A)$. Обратно, пусть $x\in\cup_{\alpha\in I}(A_\alpha\cap A)$. Тогда $x\in A\cap A_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0\in I$, значит $x\in A$, $x\in A_{\alpha_0}$. Таким образом, $x\in\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$, $x\in A$, и окончательно $x\in(\cup_{\alpha\in I}A_\alpha)\cap A$.

Докажем второе равенство. Пусть $x\in(\cap_{\alpha\in I}A_\alpha)\cup A$, отсюда $x\in(\cap_{\alpha\in I}A_\alpha)$, или $x\in A$. Если $x\in A$, то $\forall\alpha\in I$ $x\in A\cup A_\alpha$, тем самым $x\in\cap_{\alpha\in I}(A_\alpha\cup A)$. Если $x\in\cap_{\alpha\in I}A_\alpha$, то $\forall\alpha\in I$ $x\in A_\alpha$. Поэтому $\forall\alpha\in I$ $x\in A_\alpha\cup A$. Окончательно $x\in\cap_{\alpha\in I}(A_\alpha\cup A)$.

1.2. Представить множество $A=\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ в виде объединения $\cup_{n=1}^{\infty}B_n$ так, чтобы $B_i\cap B_j=\emptyset$ при $i\neq j$, $B_n\subset A_n$ для всех n.

Решение. Пусть $B_1=A_1$, $B_2=A_2\setminus A_1,\ldots,B_n=A_n\setminus(\cup_{i=1}^{n-1}A_i),\ldots$. Тогда множества B_n удовлетворяют условию задачи.

1.3. Доказать, что если $C=A\Delta B$, то $B=A\Delta C$.

Решение. Пусть $x\in B$. Возможны два случая. Первый случай: $x\in A$, тогда $x\notin C$ и $x\in A\Delta C$. Второй случай: $x\notin A$, тогда $x\in C$, поэтому $x\in A\Delta C$.

Пусть теперь $x\in A\Delta C$. Если $x\in A$, $x\notin C$, то $x\in B$. Если же $x\in C$, $x\notin A$, то снова $x\in B$. Мы показали, что $B=A\Delta C$.

1.4. Пусть $I=\alpha$ — произвольное множество индексов. Доказать принцип двойственности:

$$1.C\cup_{\alpha\in I}A_\alpha=\cap_{\alpha\in I}CA_\alpha;$$

$$2.C\cap_{\alpha\in I}A_\alpha=\cup_{\alpha\in I}CA_\alpha.$$

Решение. Докажем первое утверждение. Пусть $x\in C\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$. Тогда $x\notin\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$, поэтому $\forall\alpha\in I$ $x\notin A_\alpha$, то есть $\forall\alpha\in I$ $x\in CA_\alpha$, значит $x\in\cap_{\alpha\in I}CA_\alpha$. Пусть теперь $x\in\cap_{\alpha\in I}CA_\alpha$. Тогда $\forall\alpha\in I$ $x\in CA_\alpha$, следовательно $x\notin\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$, то есть $x\in C\cup_{\alpha\in I}A_\alpha$.

1.5 Доказать, что для последовательности непересекающихся множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_i\cap A_j=\emptyset, i\neq j$, справедливы равенства

$$\underline{\lim}A_n=\overline{\lim}A_n=\emptyset$$

Решение. Так как $\forall k\in\mathbf{N}$ $\cap_{n=k}^{\infty}A_n=\emptyset$, то $\underline{\lim}A_n=\emptyset$.

Пусть $B_k=\cup_{n=k}^{\infty}A_n$. Тогда $B_{k+1}\subset B_k$. Так как $\overline{\lim}A_n=\cap_{k=1}^{\infty}B_k$, то, предположив что существует $x\in\overline{\lim}A_n$, получим, что $\forall n\in\mathbf{N}$ $x\in B_n$. Так как $x\in B_1$, то $x\in A_{n_1}$ для некоторого n_1. Возьмем $k>n_1$. Так как $x\in B_k$, то $x \in A_{n_2}$, где $n_2 > k$. Но тогда $x \in A_{n_1} \cap A_{n_2}$, что невозможно, так как множества A_j не пересекаются.

1.6 Доказать, что для любой последовательности множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ справедливы вложения

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Привести примеры строгих включений.

Решение. Так как $\forall k \in \mathbf{N} \cap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \cap_{n=k}^{\infty} A_n$, то $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \cup_{k=1}^{\infty}(\cap_{n=k}^{\infty} A_n) = \underline{\lim} A_n$.

Пусть $x \in \underline{\lim} A_n$, тогда $\exists k_0 \in \mathbf{N}$: $x \in \cap_{n=k_0}^{\infty} A_n$. Тем самым $\forall n \geq k_0$ $x \in A_n$, значит $\forall k \in \mathbf{N}$ $x \in \cup_{n=k}^{\infty} A_n$. Отсюда $x \in \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n = \overline{\lim} A_n$.

Пусть теперь $x \in \overline{\lim} A_n$. Тогда $\forall k \in \mathbf{N}$ $x \in \cup_{n=k}^{\infty} A_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Пример строгого включения множеств: $A_1 = [0,1]$, $A_{2n+1} = [2,3] \cup [4,5]$, $A_{2n} = [2,3] \cup [6,7]$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, $\underline{\lim} A_n = [2,3]$, $\overline{\lim} A_n = [2,3] \cup [4,5] \cup [6,7]$, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = [0,1] \cup [2,3] \cup [4,5] \cup [6,7]$.

1.7. Доказать, что если последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает (то есть $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$), или монотонно убывает (то есть $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$), то

$$\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \lim A_n,$$

причем в первом случае

$$\lim A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (\cup_{k=1}^{\infty}(A_{k+1} \setminus A_k)),$$

а во втором

$$\lim A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \setminus (\cup_{k=1}^{\infty}(A_k \setminus A_{k+1})).$$

Решение. Рассмотрим случай монотонно возрастающей последовательности. Пусть $x \subset \underline{\lim} A_n = \cap_{n=1}^{\infty}(\cup_{n=k}^{\infty} A_n)$, тогда $\forall k \in \mathbf{N}$ $x \in \cup_{n=k}^{\infty} A_n$. Поэтому $\exists n(k) : x \in A_n$. В силу монотонности $\{A_n\}$, $x \in \cap_{m=n(k)}^{\infty} A_m$, а тогда $x \in \cup_{k=1}^{\infty}(\cap_{n=k}^{\infty} A_n) = \underline{\lim} A_n$. Включение $\underline{\lim} A_n \subset \overline{\lim} A_n$ доказано в предыдущей задаче.

Пусть теперь $x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, тогда $\exists k \in \mathbf{N}$: $x \in A_k$, а тогда $x \in \cup_{m=k}^{\infty} A_m$ и, в силу монотонности $\{A_n\}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $x \in \cup_{m=n}^{\infty} A_m$, поэтому $x \in \overline{\lim} A_n$.

1.8. Показать, что непустое семейство множеств, замкнутое относительно операций объединения и пересечения, может не быть кольцом.

Решение. Рассмотрим семейство всех открытых множеств на прямой. Сумма и пересечение двух открытых множеств суть открытые множества. Но данное множество не есть кольцо, так как симметрическая разность двух открытых множеств не обязана быть открытым множеством.

1.9. Доказать, что получится эквивалентное определение кольца, если потребовать от непустого семейства K замкнутости относительно операций объединения и симметрической разности.

Решение. Достаточно заметить, что K замкнуто относительно пересечения, так как $A \cap B = (A \cup B)\Delta(A\Delta B)$.

1.10 Доказать, что множество ограниченных подмножеств числовой прямой образует кольцо, которое не является ни σ- кольцом, ни алгеброй.

Решение. Данное семейство K не является σ-кольцом, так как если $A_n = [-n, n]$, то $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R} \notin K$. Кольцо K не является алгеброй, так как оно не содержит единицу E. Действительно, если $E \in K$, то $\forall n \in \mathbf{N}\ A_n \subset E$, что противоречит ограниченности E.

1.11. Пусть множества $A, A_1, \ldots, A_k$ принадлежат полукольцу K, $A_i \in A$, $1 \leq i \leq k$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Доказать, что в K можно выбрать множества $A_{k+1}, \ldots, A_n$, так что $A = \cup_{i=1}^{n} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Решение Так как K — полукольцо, то $A \setminus A_1 = \cup_{i=1}^{m} B_i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $B_i \in K$, $1 \leq i \leq m$. По определению полукольца множества $A_2 \cap B_i \in K$. Поэтому $B_i \setminus A_2 = B_i \setminus (A_2 \cap B_i) = \cup_{l=1}^{m_i} C_{li}$, $C_{li} \cap C_{ri} = \emptyset$, $l \neq r$. Так как множества B_i попарно не пересекаются, то $C_{li} \cap C_{rj} = \emptyset$, если $l \neq r$ либо $i \neq j$. Мы получили

$$A = A_1 \cup A_2 \cup (\cup_{j=1}^{m} B_j \setminus A_2) = A_1 \cup A_2 \cup (\cup_{i,l} C_{li}),$$

где множества C_{li} попарно не пересекаются и не пересекаются с A_1 и A_2. Рассуждая подобным образом, через конечное число шагов получим требуемое разложение.

1.12. Пусть $X = [0, 1]$. Рассмотрим систему K всех подмножеств множества рациональных чисел отрезка $[0, 1]$. Доказать, что K является σ-кольцом. Является ли K σ-алгеброй?

Решение. Сумма, симметрическая разность, счетное объединение подмножеств рациональных чисел остается подмножеством рациональных чисел. В качестве множества E — единицы σ-алгебры достаточно взять все рациональные точки отрезка $[0, 1]$.

1.13. Пусть X — множество непрерывных функций на $[0, 1]$. Пусть K — семейство подмножеств X, состоящее из функций $f \in X$, таких что $f(0) = 1$. Является ли K кольцом? Алгеброй?

Решение. Семейство K является алгеброй. За единицу E семейства K можно взять множество всех $f \in C[0, 1]$, таких что $f(0) = 1$.

§2. Отображения множеств. Мощность множеств.

1.14. Доказать, что для любого отображения f имеет место включение $f(f^{-1}(A)) \subset A$, если $A \neq \emptyset$. Привести пример строгого включения.

Решение. Пусть $y \in f(f^{-1}(A))$. Тогда $\exists x \in f^{-1}(A) : f(x) = y$, поэтому $y \in A$. В качестве строгого включения рассмотрим отображение $f : A \to A$, $f(x) = x^2$, $A = [-1, 1]$. Тогда $f^{-1}(A) = [-1, 1]$, $f(f^{-1}(A)) = [0, 1]$.

1.15. Доказать, что для отображения $f : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:

1) f инъективно;
2) $\forall A \subset X$ верно $f^{-1}(f(A)) = A$;
3) $\forall A, B \subset X$ верно $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;
4) $\forall A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ верно $f(A) \cap f(B) = \emptyset$;
5) $\forall A, B \subset X$, $B \subset A$ верно $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Решение. Заметим, что для любого отображения f условия 2)-5) заведомо выполнены, если $A = \emptyset$, а условия 3)-5) заведомо выполнены, если $B = \emptyset$. Поэтому далее будем рассматривать $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$.

Покажем, что из 1) следует 2). Пусть $x \in A$, $y = f(x)$. Отсюда $x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(f(A))$. Так как f инъективно, то $f^{-1}(y) = x$, то есть $f^{-1}(f(x)) = x$. Отсюда $f^{-1}(f(A)) \subset A$. Следовательно, множества равны.

Покажем, что из 2) следует 3). Так как $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, то $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Далее, $\forall y \in f(A) \cap f(B)$ имеем $y \in f(A)$, $y \in f(B)$. Пусть $x \in f^{-1}(y)$. Согласно 2), $x \in A \cap B$, то есть $y \in f(A \cap B)$, следовательно $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Покажем, что из 3) следует 4). Если $A \cap B = \emptyset$, то, согласно 3), $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B) = \emptyset$.

Покажем, что из 4) следует 5). Пусть $y \in f(A) \setminus f(B)$, тогда $\exists x \in f^{-1}(y) \subset A \setminus B$, поэтому $y \in f(A \setminus B)$. Обратно, в силу 4), $f(A \setminus B) \cap f(B) = \emptyset$, поэтому $f(A \setminus B) \subset f(A) \setminus f(B)$.

Покажем, что из 5) следует 1). Допустим, что f не инъективно. Тогда $\exists y \in Y$, $\exists x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$: $f(x_1) = f(x_2) = y$. Возьмем $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{x_2\}$. Тогда $f(A \cap B) = f(A) = f(B) = y$, что противоречит 5).

1.16. Пусть $R[a, b]$ — множество функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$. Отображение $F : R[a, b] \to \mathbf{R}$, задано формулой

$$F(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Является ли отображение F инъективным, сюрьективным, или биективным?

Решение. Отображение F сюрьективно, так как $\forall A \in \mathbf{R}\ F(\frac{A}{b-a}) = \int_a^b \frac{A}{b-a} dx = A$. Отображение F не инъективно, и тем более не биективно, так как, например, $F(f) = 0$ для любой функции f, равной нулю всюду, кроме быть может конечного числа точек.

1.17. Существует ли $f(x) \in C[0, 1]$, такая что:

1) $f([0, 1]) = \mathbf{R}$,

2) $f([0, 1]) = (0, 1)$,

3) $f([0, 1]) = [-2, -1] \cap [1, 2]$?

Решение. Непрерывная на отрезке функция ограничена на нем, поэтому 1) не реализуется. Непрерывная функция достигает на отрезке точную верхнюю и точную нижнюю грань, поэтому образ отрезка является замкнутым множеством и 2) тоже не реализуется. Условие 3) не реализуется, поскольку иначе $\min f|_{[0,1]} = -2$, $\max f|_{[0,1]} = 2$ и, так как непрерывная функция на отрезке принимает любое промежуточное значение между минимальным и максимальным, то $f([a, b]) = [-2, 2]$, что противоречит 3).

1.18. Установить взаимно однозначное соответствие между:

1) Отрезком $[0, 1]$ и квадратом $[0, 1] \times [0, 1]$,

2) Поверхностью единичной сферы S в $\mathbf{R}^3$ с одной выколотой точкой M и плоскостью $\mathbf{R}^2$,

3) Единичной сферой S и $\mathbf{R}^2$,

4) Плоскостью $\mathbf{R}^2$ и верхней полуплоскостью $y > 0$.

Решение. 1) Множество рациональных точек отрезка $[0,1]$ счетно. Множество точек квадрата, у которых обе координаты рациональны тоже счетно. Поэтому между этими множествами есть взаимно однозначное отображение. Рассмотрим теперь иррациональные точки отрезка $[0,1]$. Пусть $x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$ и ее представление в виде бесконечной десятичной дроби имеет вид $x = 0,x_1 \dots x_n \dots$. Поставим точке x в соответствие точку $f(x) = M(y,z) \in [0,1] \times [0,1]$, где $y = 0,x_1x_3 \dots x_{2n-1} \dots$, $z = 0,x_2x_4 \dots x_{2n} \dots$. Тогда одна из координат y, z заведомо не является рациональной. И обратно, если $y = 0,y_1,\dots$, $z = 0,z_1,\dots$ — бесконечные десятичные дроби, $M(y,z) \in [0,1] \times [0,1] \setminus \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$, то прообразом точки M является точка $x = 0,y_1z_1y_2z_2\dots$, причем $x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}$.

2) Без ограничения общности можно считать, что S — сфера с центром в точке $(0,0,\frac{1}{2})$, $M = (0,0,1)$. Рассмотрим стереографическую проекцию $F: (x,y) \to (\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2})$. F взаимно однозначно отображает $\mathbf{R}^2$ в $S \setminus M$.

3) Пусть $\Phi = \{(x,y) : x \in \mathbf{N}, y = 0\}$ Рассмотрим отображение $G : \mathbf{R}^2 \to S$: $G|_{\mathbf{R}\setminus\Phi} = F$, $G(1,0) = M$, $G(k,0) = F(k-1,0)$, $k = 2,3,\dots$. Отображение G искомое.

4) Отображение $F : (x,y) \to (x, e^y)$ взаимно однозначно переводит $\mathbf{R}^2$ в верхнюю полуплоскость.

1.19. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством иррациональных чисел и множеством действительных чисел.

Решение. Пусть Ir — множество иррациональных чисел, а $\{r_n\}$ — последовательность всех рациональных чисел, занумерованных так, что $r_1 = 0$. Обозначим $r'_n = r_{n-1}\sqrt{2}$, $n = 2,3,\dots$. Взаимно однозначное соответствие $F : \mathbf{R} \to Ir$ построим так: F тождественно на $Ir \setminus \{r'_n\}$, $F(r'_{2n-1}) = r_n$, $F(r'_{2n}) = r'_n$, $n \in \mathbf{N}$.

1.20. Доказать, что множество всех последовательностей $\{i_n\}$, где $i_n \in \{0,1\}$ имеет мощность $2^{\aleph_0}$.[1]

Решение. Пусть $A \subset \mathbf{N}$. Пусть $f(A) = \{i_1, \dots i_n, \dots\}$, где $i_j = 0$, если $j \notin A$ и $i_j = 1$, если $j \in A$. Тогда f взаимно однозначно отображает множество всех подмножеств $\mathbf{N}$ на S.

1.21. Определить мощность множеств:

1) множество точек из $\mathbf{R}^n$, все координаты которых рациональны;

2) множество, состоящее из непересекающихся интервалов на прямой;

3) множество всех интервалов (a,b) с рациональными концами;

4) множество, состоящее из непересекающихся шаров в $\mathbf{R}^n$.

Решение. 1) Множество счетное, так как счетное число счетных множеств есть счетное множество.

2) Мощность множества не более чем счетна. Если интервалов бесконечно много, то в каждом можно взять по рациональному числу.

---

[1]Напомним, что множество S имеет мощность $2^{\aleph_0}$, если существует взаимно однозначное соответствие между S и множеством всех подмножеств множества натуральных чисел (или, что то же самое, S имеет мощность континуум).

3) Множество счетно, так как каждому интервалу (a, b) можно поставить в соответствие точку $M(a, b)$ в $\mathbf{R}^2$.

4) Множество не более, чем счетное, так как каждому шару в $\mathbf{R}^n$ можно поставить в соответствие точку $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, все координаты которой — рациональны.

1.22 Доказать, что объединение:

1) счетного числа непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуум;

2) континуум непересекающихся множеств мощности континуума имеет мощность континуум.

Решение. Докажем первое утверждение, Пусть $M = \cup_{i=1}^{\infty} M_i$, где каждое M_i имеет мощность континуум. Множество M имеет мощность не менее континуума. С другой стороны, каждому множеству M_i поставим во взаимно однозначное соответствие полуинтервал $[i-1, i)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $M \leftrightarrow [0, \infty)$, поэтому M — множество мощности континуум.

Докажем второе утверждение. Пусть $M = \cup_{\alpha \in I} M_\alpha$, где множества M_α и I имеют мощность континуум. Установим взаимно однозначное соответствие между M и квадратом $[0,1] \times [0,1]$, имеющим мощность континуум, следующим образом: $\alpha \leftrightarrow x \in [0,1]$, $M_\alpha \leftrightarrow \{(x, y) | y \in [0,1]\}$.

1.23. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции не более, чем счетно.

Решение. Пусть функция $f(x)$ монотонно возрастает и x_0 — точка разрыва $f(x)$. Тогда для $b(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x)$ и $a(x_0) = \lim_{x \to x_0-0} f(x)$ имеем $b(x_0) - a(x_0) > 0$. Отрезки $[a(x_0), b(x_0)]$ не пересекаются. Следовательно таких отрезков не более чем счетное число.

1.24. Какова мощность множества:

1) возрастающих последовательностей натуральных чисел;

2) всех последовательностей действительных чисел;

3) сходящихся последовательностей действительных чисел;

4) ограниченных последовательностей действительных чисел;

5) сходящихся числовых рядов.

Решение. В первом случае — мощность континуум. Так как данное множество имеет мощность не более мощности множества всех последовательностей натуральных чисел, то его мощность не больше континуума. С другой стороны, каждой последовательности натуральных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ ставим в соответствие последовательность $(a_1, a_1 + a_2, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_j, \ldots,)$. Отсюда следует, что мощность множества возрастающих последовательностей натуральных чисел не меньше континуума.

Во втором случае — мощность континуум. Множество $\mathbf{R}$ равномощно множеству M последовательностей, состоящих из нулей и единиц. Пусть $f : \mathbf{R} \to M$ — взаимно однозначное соответствие. Каждой последовательности $\{\alpha_n\}$ вещественных чисел сопоставим бесконечную матрицу из нулей и единиц, n-й столбец которой равен $f(\alpha_n)$. Это соответствие взаимно однозначно. Множество всех бесконечных матриц из нулей и единиц имеет мощность континуум, так как любой матрице $||a_{ij}||$ можно поставить в соответствие последовательность из нулей и единиц

$$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \dots, a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}, \dots\},$$

а последнее соответствие также взаимно однозначно.

В третьем случае — мощность континуум. С одной стороны, данное множество содержится среди множества всех последовательностей действительных чисел, поэтому его мощность не больше континуума. С другой стороны, множество постоянных последовательностей уже имеет мощность континуум.

В четвертом случае — мощность континуум. Решение аналогично второму случаю.

В пятом случае — мощность континуум. Сопоставив каждому ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ последовательность $(a_1, \dots, a_n, \dots)$, что мощность множества сходящихся рядов не больше континуума. С другой стороны, ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = 0$ при $n > 1$ уже образуют множества мощности континуум.

1.25. Какова мощность множества:

1) функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$;

2) кусочно-линейных непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$;

3) возрастающих непрерывных функций на отрезке $[0, 1]$;

4) функций, имеющих не более чем счетное число точек разрыва на отрезке $[0, 1]$;

5) всех действительных однозначных функций на отрезке $[0, 1]$;

6) функций, ограниченных на отрезке $[0, 1]$;

7) функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[0, 1]$.

Решение. Первый случай : множество имеет мощность континуум. С одной стороны, множество содержит постоянные функции, поэтому его мощность не меньше континуума. С другой стороны, непрерывная функция однозначно задается значениями в рациональных точках (которых счетное множество), поэтому мощность множества непрерывных функций не больше множества вещественных последовательностей, значит не больше континуума (см. 1.24 п.2)).

Второй случай: множество имеет мощность континуум. Данное множество содержит все постоянные функции, поэтому его мощность не меньше континуума, и является подмножеством всех непрерывных функций, поэтому его мощность не больше континуума.

Третий случай: множество имеет мощность континуум, поскольку содержится в множестве непрерывных функций и содержит функции вида $f(x) = cx$, $c \in \mathbf{R}$.

Четвертый случай: множество имеет мощность континуум. С одной стороны, множество содержит все непрерывные функции, поэтому его мощность не меньше континуума. С другой стороны, функции из данного множества определяются своими значениями в счетном числе точек (точек разрыва и точек с рациональными координатами), поэтому его мощность не больше континуума.

Пятый случай: множество имеет мощность гиперконтинуум. С одной стороны, множество содержит характеристические функции всех подмножеств отрезка $[0, 1]$, поэтому его мощность не меньше континуума. С другой стороны, любая функция однозначно задается своим графиком в $\mathbf{R}^2$, поэтому мощность множества всех вещественнозначных функций не превосходит мощности множества всех подмножеств $\mathbf{R}^2$. Последняя равна гиперконтинууму, поскольку множество $\mathbf{R}^2$ равномощно квадрату $[0,1] \times [0,1]$.

Шестой случай: множество имеет мощность гиперконтинуум. Решение аналогично пятому случаю.

Седьмой случай: множество имеет мощность гиперконтинуум. С одной стороны, функции, интегрируемые по Риману содержатся среди множества всех вещественных функций, поэтому их мощность не больше гиперконтинуума.

Рассмотрим теперь канторово совершенное множество K на отрезке $[0,1]$. Оно имеет нулевую меру Лебега. Поэтому любая ограниченная функция, равная нулю вне K, интегрируема по Риману на отрезке $[0,1]$. Так как K несчетно, то множество таких функций равномощно множеству ограниченных функций на отрезке. Последнее имеет мощность гиперконтинуум. Поэтому мощность интегрируемых по Риману функций не больше гиперконтинуума.

ГЛАВА II. МЕРА ЛЕБЕГА И ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ.

§1 Мера Лебега на прямой.

Мерой Лебега конечного интервала (a, b), $a < b$ называется его длина, т.е. есть $\mu(a, b) = b - a$. Заметим, что $\mu(a, b) > 0$.

Пусть G — ограниченное непустое открытое множество на прямой. Если $G = \emptyset$, по определению полагаем $\mu(G) = 0$. Если множество G не пусто, то оно представимо в виде объединения не более, чем счетного числа непересекающихся интервалов:

$$G = \cup_k (a_k, b_k).$$

Мерой Лебега множества G называется число

$$\mu(G) = \sum_k \mu(a_k, b_k) = \sum_k (b_k - a_k),$$

где число слагаемых не более чем счетно и в случае счетного числа слагаемых ряд сходится в силу ограниченности множества G. Положим $\mu(\emptyset) = 0$. Таким образом, любое ограниченное открытое множество G является измеримым по Лебегу.

Пусть F — непустое ограниченное замкнутое множество на прямой и $[A, B]$ — наименьший отрезок, содержащий F. Тогда множество $[A, B] \setminus F$ открыто и его мера Лебега равна $\mu([A, B] \setminus F)$. Мерой Лебега множества F называется число

$$\mu(F) = B - A - \mu([A, B] \setminus F).$$

В частности, если $F = [A, B]$, то $\mu(F) = B - A$, т.е. мера Лебега отрезка равна его длине. Ясно, что мера Лебега ограниченного замкнутого множества на прямой не отрицательна.

Мера Лебега ограниченных замкнутых и открытых множеств на прямой обладает следующими свойствами:

1) мера непустых открытых множеств положительна, а мера замкнутых множеств неотрицательна;

2) пусть каждое из ограниченных множеств M_1 и M_2 является либо открытым, либо замкнутым и $M_1 \subset M_2$. Тогда $\mu(M_1) \leq \mu(M_2)$;

3) пусть ограниченное открытое множество $G = \cup_k G_k$ есть объединение не более чем счетного числа непересекающихся открытых множеств G_k, а ограниченное замкнутое множество $F = \cup_{k=1}^n F_n$ есть объединение конечного числа непересекающихся замкнутых множеств F_k. Тогда

$$\mu(G) = \sum_k \mu(G_k), \mu(F) = \sum_{k=1}^n \mu(F_k).$$

Пусть E — произвольное ограниченное множество на прямой. Назовем *верхней мерой Лебега множества* E число

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subset G} \mu(G),$$

где точная нижняя грань берется по открытым ограниченным множествам. Верхняя мера Лебега существует для любого ограниченного множества на прямой.

Ограниченное множество $E \subset \mathbf{R}$ называется *измеримым по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется ограниченное открытое множество G_ε, такое что $E \subset G_\varepsilon$ и $\mu^*(G_\varepsilon \setminus E) < \varepsilon$. Если E измеримо по Лебегу, то *мерой Лебега множества* E называется его верхняя мера Лебега, то есть

$$\mu(E) = \mu^*(E).$$

Таким образом, введенные понятия измеримости и меры Лебега обладают тем свойством, что любые ограниченные открытые и замкнутые множества являются измеримыми по Лебегу, и вновь определенная мера совпадает с мерой, введенной ранее для этих множеств. Кроме того, если ограниченное множество E является объединением не более, чем счетного числа измеримых множеств, то E измеримо. Пересечение не более чем счетного числа измеримых множеств есть множество измеримое, разность двух измеримых множеств есть множество измеримое. При этом мера Лебега обладает следующими свойствами:

1) если E измеримо по Лебегу, то $\mu(E) \geq 0$, т.е. мера Лебега *неотрицательна*;

2) если $E_1 \subset E_2$ и оба множества измеримы, то

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2).$$

Это свойство называется *монотонностью меры*;

3) если измеримое множество $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$, где $E_k \cap E_j = \emptyset$ при $k \neq j$ и множества E_k измеримы, то

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Это свойство называется *счетной аддитивностью меры Лебега*;

4) если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых множеств, $E_n \subset E_{n+1}$ и $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ ограничено, то E измеримо и

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n);$$

5) если $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых множеств, $E_n \supset E_{n+1}$ и $E = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$, то E измеримо и

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n);$$

Множество $E \subset \mathbf{R}$ (необязательно ограниченное) называется измеримым, если для любого натурального n измеримо множество

$$E_n = [-n, n] \cap E.$$

Мерой Лебега такого множества называется предел

$$\mu(E) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

Этот предел либо конечен, либо равен $+\infty$, поскольку $\mu(E_n)$ возрастает при $n \to \infty$.

Класс измеримых множеств и после указанного расширения будет инвари-антным относительно объединения, пересечения и разности, если они произво-дятся не более, чем счетное число раз.

§2 Мера Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Рассмотрим множества

$$\Pi = \{x \in \mathbf{R}^n : a_k < x_k \le b_k\},$$

$$\overline{\Pi} = \{x \in \mathbf{R}^n : a_k \le x_k \le b_k\}.$$

Множество Π будем называть полуоткрытым параллелепипедом, множество $\overline{\Pi}$ будем называть замкнутым параллелепипедом. Положим

$$\mu(\Pi) = \mu(\overline{\Pi}) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Пусть G — непустое открытое множество[1].Тогда оно представимо в виде счетного объединения полуоткрытых параллелепипедов

(*) $$G = \cup_{k=1}^{\infty} \Pi_k, \Pi_i \cap \Pi_j = \emptyset, i \ne j.$$

Мерой Лебега множества G называется число

$$\mu(G) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\Pi_k).$$

(Числовой ряд сходится в силу ограниченности множества G. Величина $\mu(G)$ не зависит от представления (*).) Положив $\mu(\emptyset) = 0$, получим что каждое открытое ограниченное множество измеримо по Лебегу.

Пусть E — произвольное ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$. Назовем *верхней мерой Лебега в* $\mathbf{R}^n$ *множества* E число

$$\mu^*(E) = \inf_{E \subset G} \mu(G),$$

[1] напомним, что множество G называется открытым в $\mathbf{R}^n$, если любая точка $x' = (x'_1, \ldots, x'_n$ содержится в G вместе с некоторым открытым шаром $B_{x',r} = \{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{j=1}^{n} (x_j - x'_j)^2 < r^2\}$.

где точная нижняя грань берется по всевозможным открытым ограниченным множествам. Верхняя мера существует для любого ограниченного множества в $\mathbf{R}^n$.

Ограниченное множество $E \subset \mathbf{R}^n$ называется *измеримым по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется ограниченное открытое множество G_ε, такое что $E \subset G_\varepsilon$ и $\mu^*(G_\varepsilon \backslash E) < \varepsilon$. В этом случае *мерой Лебега множества* E называется его верхняя мера Лебега $\mu^*(E)$, т.е.

$$\mu(E) = \mu^*(E).$$

Из определения измеримости вытекает, что любое ограниченное открытое множество измеримо и вновь определенная мера совпадает с мерой, введенной ранее для этих множеств. То же самое верно и для полуоткрытых параллелепипедов. Кроме того, любое ограниченное замкнутое множество измеримо, в частности $\mu(\overline{\Pi}) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$. Кроме того, если ограниченное множество E является объединением не более, чем счетного числа измеримых множеств, то E измеримо. Пересечение не более чем счетного числа измеримых множеств есть множество измеримое, разность двух измеримых множеств есть множество измеримое. При этом мера Лебега в $\mathbf{R}^n$, так же как и мера Лебега на прямой, обладает свойствами 1)-5), приведенными в §1. Справедлив

Критерий измеримости по Лебегу в $\mathbf{R}^n$. *Для того, чтобы ограниченное множество $E \subset \mathbf{R}^n$ было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовали ограниченное открытое множество $G \supset E$ и замкнутое множество $F \subset E$, такие что $\mu^*(G \setminus F) < \varepsilon$.*

В частности этот критерий справедлив и в одномерном случае.

Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ (необязательно ограниченное) называется *измеримым по Лебегу*, если для любого натурального k измеримо множество

$$E_k = \overline{\Pi}_k \cap E,$$

где $\Pi_k = \{x \in \mathbf{R}^n : |x_j| \le k, 1 \le j \le n\}$. *Мерой Лебега множества* $E \subset \mathbf{R}^n$ называется предел

$$\lim_{k\to\infty} \mu(E_k) = \mu(E).$$

§3. Мера как функция множеств, продолженная с полуколец на кольца множеств.

В этом параграфе мы дадим более общее понятие меры.

Функция множеств μ называется *мерой*, если:

1) функция μ определена на множествах, принадлежащих некоторому полукольцу σ_μ;

2) $\mu(E) \ge 0$ для любого множества $E \in \sigma_\mu$;

3) функция μ конечно аддитивна, то есть для любого множества $E \in \sigma_\mu$, такого что

$$E = \cup_{k=1}^{n} E_k, E_k \cap E_j = \emptyset, k \ne j, E_k \in \sigma_\mu$$

справедливо равенство

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k).$$

Отметим, что согласно этому определению, $\mu(\emptyset) = 0$.

Мера $\tilde{\mu}$, заданная на $\sigma_{\tilde{\mu}}$, называется *продолжением меры* μ, *заданной на* σ_μ, если $\sigma_\mu \subset \sigma_{\tilde{\mu}}$ и для каждого множества $E \subset \sigma_\mu$ выполнено равенство $\tilde{\mu}(E) = \mu(E)$. Справедлива

Теорема о продолжении меры. *Для каждой меры μ, заданной на полукольце σ_μ, существует единственное продолжение $\tilde{\mu}$, имеющее своей областью определения минимальное кольцо $R(\sigma_\mu)$ над полукольцом σ_μ.*

Мера μ, имеющая область определения σ_μ, называется *счетно-аддитивной* или σ-аддитивной, если для любых множеств E и $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, таких что $E, E_n \in \sigma_\mu$, $n \in \mathbf{N}$,

$$E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \cap E_j = \emptyset, k \neq j$$

справедливо равенство

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Если мера μ, определенная на полукольце σ_μ, является σ-аддитивной, то и ее продолжение $\tilde{\mu}$ на кольцо $R(\sigma_\mu)$ также σ-аддитивно.

Если мера на полукольце σ_μ является σ-аддитивной, то ее можно продолжить на более широкий класс множеств, чем кольцо $R(\sigma_\mu)$. Это можно сделать с помощью так называемого *лебегова продолжения.*

Пусть на некотором полукольце σ_μ с единицей E задана σ-аддитивная мера μ. Определим на совокупности всех подмножеств $\{A\}$ множества E функцию множеств $\mu^*(A)$ по формуле

$$\mu^*(A) = \inf \sum_n \mu(B_n),$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества A не более, чем счетным семейством $\{B_n\}$ множеств из σ_μ. Функцию μ^* назовем *внешней мерой.*

Множество A называется *измеримым по Лебегу*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in R(\sigma_\mu)$, что

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon.$$

В этом случае внешняя мера $\mu^*(A)$ называется *лебеговой мерой множества A.* Все множества из σ_μ и $R(\sigma_\mu)$ являются измеримыми по Лебегу и для этих множеств $\mu^* = \mu$. Более того, система всех измеримых по Лебегу множеств является σ-алгеброй с единицей E. Функция множеств μ, определенная на системе измеримых множеств и совпадающая с внешней мерой μ^* называется *лебеговым продолжением меры μ с полукольца σ_μ с единицей E.*

Если полукольцо σ_μ, на котором определена исходная мера μ не имеет единицы, то построение лебегова продолжения отличается от вышеизложенного тем, что в определении внешней меры μ^* точная нижняя грань берется по таким покрытиям множества не более чем счетным семейством $\{B_n\}$ множеств из σ_μ, для которых сумма ряда $\sum_n \mu(B_n)$ конечна.

Классом $\mathcal{B}$ борелевских множеств в $\mathbf{R}^n$ называется наименьшее σ-кольцо, порожденное классом всех открытых подмножеств $\mathbf{R}^n$. Множество A называется *борелевским*, если $A \in \mathcal{B}$. Мера Бореля μ на замкнутых параллелепипедах $\overline{\Pi}$ определяется по формуле

$$\mu(\overline{\Pi}) = \prod_{k=1}^{n}(b_k - a_k).$$

Этим соотношением мера μ однозначно определяется на σ-кольце $\mathcal{B}$, а любое множество $A \in \mathcal{B}$ называется *измеримым по Борелю*. Мера Лебега в $\mathbf{R}^n$ является продолжением меры Бореля, заданной на σ-кольце $\mathcal{B}$, на σ-алгебру с единицей $E = \mathbf{R}^n$. На этой σ-алгебре мера Лебега является σ-аддитивной.

Мера μ называется полной, если из того, что $\mu(A) = 0$ и $A' \subset A$, вытекает, что A' измеримо. Очевидно, что при этом $\mu(A') = 0$. Лебегово продолжение любой меры полно. Любую σ-аддитивную меру на σ-алгебре можно продолжить до полной, положив ее равной нулю на любом подмножестве множества нулевой меры. В дальнейшем будем всегда предполагать, что рассматриваемая мера является полной.

§4. Измеримые функции.

Пусть в пространстве $\mathbf{R}^n$ задана σ-аддитивная мера μ, определенная на σ-алгебре σ_μ. Пусть $E \subset \mathbf{R}^n$ — множество, измеримое относительно меры μ. Рассмотрим вещественнозначную функцию $f(x)$, определенную на E. Функция f называется *μ-измеримой на множестве E*, если для любого $a \in \mathbf{R}$ множество

$$\{x \in E : f(x) > a\}$$

измеримо относительно меры μ. Функция f μ-измерима тогда и только тогда, когда для любого $a \in \mathbf{R}$ измеримо одно из множеств $\{x \in E : f(x) \geq a\}$, $\{x \in E : f(x) \leq a\}$, $\{x \in E : f(x) < a\}$. Множество измеримо тогда и только тогда, когда измерима характеристическая функция этого множества.

Если функции f и g μ-измеримы, то μ- измеримы и следующие функции: $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$, $|g|$, $\frac{f}{g}$ при $g \neq 0$, $\max(f, g)$.

Если на измеримом множестве E задана последовательность измеримых функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ и для каждого $x \in E$ существует конечный или бесконечный предел

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

то функция $f(x)$ измерима. Так же как и в этом утверждении, в случаях, когда ясно, о какой мере идет речь, мы вместо "μ-измеримости" будем писать "измеримость".

Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ограниченная при каждом x последовательность измеримых функций, то следующие функции будут также измеримы:

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x), \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x), \sup_n f_n(x), \inf_n f_n(x).$$

Некоторое свойство называется выполненым *почти всюду* (п.в.) на измеримом множестве E, если оно выполнено на E всюду, кроме, быть может множества меры нуль. Две функции, заданные на одном и том же измеримом множестве E, называются *эквивалентными*, если они совпадают п.в. на E. Функция

$f(x)$, определенная на некотором измеримом множестве E и эквивалентная на нем некоторой измеримой функции $g(x)$ также измерима.

Теорема Лузина (C-свойство Лузина). *Пусть множество E μ-измеримо и $\mu(E) < \infty$. Функция $f(x)$, принимающая п.в. на E конечные значения, измерима тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется μ- измеримое множество $E_\varepsilon \subset E$, такое что $\mu(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$ и функция $f(x)$ непрерывна на E_ε.*

Если в определении μ-измеримости функций рассмотреть меру Лебега, или меру Бореля, то получим функции, измеримые по Лебегу или по Борелю соответственно. Любая функция, измеримая по Борелю, является измеримой и по Лебегу. Обратное, вообще говоря, неверно (см. задачу 2.38.). Тем не менее справедливо утверждение: любая функция, измеримая по Лебегу, будет измеримой и по Борелю после надлежащего исправления на множестве меры нуль, а всякое измеримое по Лебегу множество с точностью до множества меры нуль является измеримым и по Борелю.

Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется сходящейся п.в. на E к функции f, если

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

п.в. на E.

Если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых на множестве E функций сходится к функции f почти всюду на E, то функция f измерима на E.

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ μ-измеримых функций , определенных на μ-измеримом множестве E и п.в. на E конечных называется сходящейся по мере μ к измеримой и п.в. на E конечной функции f, если для любого $\sigma > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma\} = 0.$$

Далее будем считать, что мера множества E конечна. Справедлива

Теорема Лебега. *Если последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых функций сходится п.в. на множестве E к функции f, то она сходится к f и по мере на E.*

В обратную сторону это утверждение, вообще говоря, неверно (см. задачу 2.44). Однако справедлива

Теорема Рисса. *Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере μ к функции f на множестве E. Тогда найдется подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к f п.в. на E.*

Существует также связь между равномерной сходимостью и сходимостью п.в..

Теорема Егорова. *Пусть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых п.в. конечных функций сходится п.в на множестве E к п.в. конечной функции f. Тогда для любого $\delta > 0$ существует измеримое множество $E_\delta \subset E$, такое что:*

1) $\mu(E_\delta) > \mu(E) - \delta$;

2) f_n сходится равномерно к f на E_δ.

К числу важных относится следующее

Утверждение. *Для всякой измеримой и п.в. конечной на множестве E функции существует последовательность непрерывных на E функций, которая сходится к ней по мере на E.*

Применив теорему Рисса, получаем, что для всякой измеримой и п.в. конечной на множестве E функции существует последовательность непрерывных на E функций, которая сходится к данной функции п.в. на E.

Задачи

§1 Мера Лебега на прямой.

2.1. Пусть $\mathcal{A}$ — открытое множество на прямой и $\mu(\mathcal{A}) = \alpha > 0$. Доказать, что для любого β, $0 < \beta < \alpha$ существует открытое множество $\mathcal{A}_\beta \subset \mathcal{A}$, такое что $\mu(\mathcal{A}_\beta) = \beta$.

Решение. Так как множество $\mathcal{A}$ открыто, то его можно представить в виде объединения не более чем счетного числа непересекающихся интервалов: $\mathcal{A} = \cap_k(a_k b_k)$, $(a_k, b_k) \cap (a_n, b_n) = \emptyset$, $k \neq n$. Тогда $\mu(\mathcal{A}) = \sum_k (b_k - a_k)$. Возьмем в каждом интервале (a_k, b_k) интервал (a'_k, b'_k), так что $b'_k - a'_k = (b_k - a_k)\frac{\beta}{\alpha} < b_k - a_k$. Поэтому множество $\mathcal{A}_\beta = \cup_k(a'_k, b'_k)$ открыто и $\mu(\mathcal{A}_\beta) = \sum_k (b_k - a_k)\frac{\beta}{\alpha} = \beta$.

2.2. Можно ли построить на отрезке $[a, b]$ замкнутое множество, мера которого равна $b - a$, но которое отлично от всего отрезка $[a, b]$?

Решение Такого множества не существует. Предположим противное, что существует множество $M \subset [a, b]$, такое что $\mu(M) = b - a$. Пусть $M_1 = [a, b] \setminus M$. Тогда $\mu(M_1) = 0$, $M_1 \neq \emptyset$. Так как $M_1 \neq \emptyset$, то существует точка $x \in M_1$ и окрестность $U_\varepsilon(x)$, такая что $M \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$ (можно считать, что $U_\varepsilon(x) \cap [a, b]$ или интервал, если $x \in (a, b)$, или полуинтервал, если $x = a$, или $x = b$). В любом случае $0 < \mu([a, b] \cap U_\varepsilon(x)) \leq \mu(M_1)$, что противоречит первоначальному предположению.

2.3. Построить всюду плотное открытое множество на отрезке $[0, 1]$, дополнение которого до отрезка $[0, 1]$ имеет положительную меру.

Решение. Пусть $0 < \alpha \leq 1$. Построим открытое всюду плотное на отрезке $[0, 1]$ множество, мера которого равна α.

Первый шаг. Возьмем интервал O_1 с центром в точке $\frac{1}{2}$ длины $\frac{\alpha}{3}$.

Второй шаг. Множество $[0, 1] \setminus O_1$ состоит из двух отрезков. В каждом из этих отрезков возьмем интервал с центром в середине отрезка. Обозначим эти интервалы O_1^2, O_2^2, $\mu(O_1^2) + \mu(O_2^2) = \frac{2\alpha}{3^2}$.

На третьем шаге получим четыре интервала O_1^3, O_2^3, O_3^3, O_4^3, $\mu(O_1^3) + \mu(O_2^3) + \mu(O_3^3) + \mu(O_4^3) = \frac{4\alpha}{3^3}$.

Процесс построения продолжим и получим счетное число выброшенных интервалов, объединение которых и есть искомое множество. Обозначим его O, $\mu(O) = \frac{\alpha}{3} + \frac{2\alpha}{3^2} + \frac{4\alpha}{3^3} + \cdots = \frac{\alpha}{3}\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \alpha$. Это множество всюду плотное на отрезке $[0, 1]$. Любую точку из отрезка $[0, 1]$ можно приблизить последовательностью точек из множества O.[2]

---

[2]При $\alpha = 1$ дополнение к построенному множеству называется канторовым множеством C. Это множество несчетно и имеет меру нуль.

2.4. Пусть на отрезке $[0,1]$ заданы измеримые множества A_1 и A_2, такие что $\mu(A_1) + \mu(A_2) > 1$. Доказать, что $\mu(A_1 \cap A_2) > 0$.

Решение. Представим множества A_1 и A_2 в виде

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_1 \cap A_2), A_2 = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_2 \cap A_1).$$

Предположим, что $\mu(A_1 \cap A_2) = 0$, тогда $\mu(A_1) = \mu(A_1 \setminus A_2)$, $\mu(A_2) = \mu(A_2 \setminus A_1)$. Множества $A_1 \setminus A_2$ и $A_2 \setminus A_1$ не пересекаются и содержатся внутри отрезка $[0,1]$, поэтому $\mu(A_1) + \mu(A_2) = \mu(A_1 \setminus A_2) + \mu(A_2 \setminus A_1) \le 1$, что противоречит условию.

2.5. Доказать, что если множество E на прямой имеет меру $p > 0$, то для любого $q : 0 \le q \le p$ найдется множество $E_1 \subset E$, такое что $\mu(E_1) = q$.

Решение. Возьмем q_1: $q < q_1 < p$. Найдется такой отрезок $[-u, u]$, $u \in \mathbb{N}$, что $\mu([-u, u] \cap E) \ge q_1$. Введем функцию $f(x) = \mu(E \cap [-x, x])$, $x \in [0, u]$. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонно возрастает, $f(0) = 0$, $f(u) \ge q_1 > q$. Следовательно, найдется точка $x_0 \in [0,1]$: $f(x_0) = q$. Искомое множество $E_q = E \cap [-x_0, x_0]$, $\mu(E_q) = q$.

2.6. Пусть $E \subset [0,1]$ — измеримое множество и для любого интервала I имеет место неравенство $\mu(E \cap I) \le \alpha\mu(I)$, число $\alpha < 1$ фиксировано. Доказать, что $\mu(E) = 0$.

Решение. Так как E измеримо, то $\mu(E) = \mu^*(E) = \inf_{O \supset E} \mu(O)$, O — открытые множества. Возьмем $\varepsilon > 0$, тогда найдется открытое множество O_ε такое что $E \subset O_\varepsilon$, $\mu(E) > \mu(O_\varepsilon) - \varepsilon$. Имеем $E = E \cap O_\varepsilon$, но O_ε — открытое множество, его можно представить в виде $O_\varepsilon = \cup_k (a_k, b_k)$, интервалы (a_k, b_k) не пересекаются. Поэтому $\mu(E) = \sum_k (E \cap (a_k, b_k)) \le \alpha\mu(O_\varepsilon)$. Тем самым $\mu(O_\varepsilon) - \varepsilon < \mu(E) \le \alpha\mu(O_\varepsilon)$ или $\mu(O_\varepsilon)(1 - \alpha) < \varepsilon$. Так как $\mu(E) \le \mu(O_\varepsilon)$, то $\mu(E) = 0$.

2.7. Для любого числа $\alpha : 0 \le< \alpha \le 1$, построить такое измеримое множество $E \subset [0,1]$, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(E \cap (0, \varepsilon))}{\varepsilon} = \alpha.$$

Решение. Если $\alpha = 0$, то множество E, состоящее из одной точки, удовлетворяет условию задачи. Пусть $\alpha \ne 0$ и $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Рассмотрим отрезок $[0, A]$ и множества E_i: $E_1 = (A - \frac{\alpha}{1^2}, A]$, $E_j = (A - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k^2} - \frac{\alpha}{j^2}, A - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k^2}]$, $j > 1$. Имеем $E_i \cap E_j = \emptyset$ при $i \ne j$, $\mu(E_j) = \frac{\alpha}{j^2}$. Искомое множество $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$.

2.8. На отрезке $[0,1]$ построить измеримое множество первой категории меры 1.

Решение. Пусть C_n — канторово совершенное множество на отрезке $[0,1]$ меры $\frac{n-1}{n}$ (то есть дополнение к открытому всюду плотному множеству меры $\alpha = \frac{1}{n}$, построенному в задаче 2.3). Пусть $C = \cup_{n=1}^{\infty} C_n$. Тогда C — множество первой категории, $\mu(C_n) = \frac{n-1}{n} \le \mu(C) \le 1$. Таким образом $\mu(C) = 1$.

2.9. Построить непрерывную функцию на отрезке $[a, b]$, которая переводит множество меры нуль на множество положительной меры.

Решение. Мы построим непрерывную монотонную функцию $\phi(x)$, называемую *канторовой функцией*, которая отображает канторово множество C меры нуль (см. задачу 2.3) на отрезок $[0,1]$.

На множестве $[0,1] \setminus C$ положим $\phi(x)$ постоянной на каждом интервале дополнительном к канторовому множеству и принимающей на интервалах длины 3^{-k} значения $\frac{1}{2^k}, \frac{3}{2^k}, \ldots, 1 - \frac{1}{2^k}$.

Определим теперь $\phi(x)$ на C. Отметим, что $x \in C$ тогда и только тогда, когда x можно представить троичным разложением $x = 0, a_1 a_2 \ldots$, где a_n четно, $n \in \mathbf{N}$. Положим $\phi(x) = y$, где двоичное разложение числа y имеет вид $0, \frac{a_1}{2} \frac{a_2}{2}, \ldots)$. Тогда $\phi(C) \subset [0,1]$. Покажем, что $\phi(C) = [0,1]$. Рассмотрим $y \in [0,1]$ и разложим y в двоичную дробь $y = 0, y_1 y_2 \ldots$. Тогда троичная дробь $0, 2y_1 2y_2 \ldots$ отвечает некоторому числу $x \in C$, причем $\phi(x) = y$.[3] Поэтому $\phi(x)$ — монотонная функция на отрезке $[0,1]$, отображающая C на весь отрезок $[0,1]$. Так как функция $\phi(x)$ монотонна, то она не может других разрывов, кроме скачков, но $\phi(C) = [0,1]$, поэтому функция $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,1]$.

2.10. Построить на числовой прямой измеримое по Лебегу, но неизмеримое по Борелю множество.

Решение. Пусть $\phi(x)$ — канторова функция для канторова совершенного множества C меры 0 на отрезке $[0,1]$ (см. задачу 2.9). Функция $\psi(x) = x + \phi(x)$ возрастает и непрерывна, $\psi(C)$ — множество положительной меры. На любом множестве положительной меры существует не измеримое по Лебегу подмножество. Пусть $D \subset \psi(C)$ — неизмеримое по Лебегу множество. Тогда множество $E = \psi^{-1}(D)$ измеримо по Лебегу, так как содержится в множестве меры 0 по Лебегу, но $\psi^{-1}(D)$ не является борелевским.

2.11. Привести пример множества меры 0 не являющееся множеством точек разрыва никакой действительнозначной функции.

Решение. Множество точек разрыва всякой функции из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ является множеством типа F_σ, то есть является борелевским множеством. Тем самым измеримое неборелевское множество есть искомое (см., например, задачу 2.10).

2.12. Пусть ϕ — отображение числовой прямой на себя, при котором

$$|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|, x, y \in \mathbf{R}.$$

Доказать, что если E — измеримое множество на прямой, то множество $\phi(E)$ также измеримо и $\mu(\phi(E)) = E$.

Решение. Из условия следует, что ϕ — взаимно-однозначное непрерывное отображение, переводящее открытые множества в открытые, замкнутые множества в замкнутые, а также сохраняющее расстояние между образами двух точек. Тем самым $\phi(E)$ — измеримое множество, если E — измеримое, $\mu(\phi(E)) = \mu(E)$.

§2 Мера Лебега в $\mathbf{R}^n$.

2.13. Доказать, что ограниченное множество E измеримо по Лебегу в $\mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется замкнутое множество $F \subset E$ такое, что

$$\mu(F) > \mu^*(E) - \varepsilon.$$

---

[3] Отметим, что отображение ϕ не является взаимно однозначным, $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 являются концами одного из интервалов, дополнительных к C. При этом значение функции ϕ на интервале (x_1, x_2) совпадает с $\phi(x_1)$ и $\phi(x_2)$.

Решение. Пусть множество E измеримо и $E \subset \Pi = \{x \in \mathbf{R}^n | a_k \le x_k \le b_k\}$, $k = 1, \ldots, n$. Положим $CE = \Pi \setminus E$. Множество CE измеримо, поэтому существует открытое множество O_ε: $CE \subset O_\varepsilon$, $\mu(O_\varepsilon \setminus CE) < \varepsilon$. Представим множество E в виде $E = CO_\varepsilon \cup (E \cap O_\varepsilon)$ (здесь $CO_\varepsilon = \Pi \setminus O_\varepsilon$), $CO_\varepsilon \subset E$, CO_ε — замкнутое множество. Также $E \cap O_\varepsilon = O_\varepsilon \setminus CE$, поэтому $\mu(CO_\varepsilon) > \mu(E) - \varepsilon$.

Пусть теперь для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset E$: $\mu(F) > \mu^*(E) - \varepsilon$. Докажем, что E — измеримое множество. Так как $F \subset E$, то для любого открытого множества $O \supset E$ следует, что $\mu^*(O \setminus E) \le \mu^*(O \setminus F)$. Так как открытые и замкнутые множества измеримы и $O = (O \setminus F) \cup F$, то $\mu(O) = \mu(O \setminus F) + \mu(F)$. Тогда $\mu(O \setminus F) = \mu(O) - \mu(F) \le \mu(O) - \mu^*(E) + \varepsilon$. Выберем открытое множество O таким образом, что $\mu(O) < \mu^*(E) + \varepsilon$, что можно сделать по определению верхней меры. Окончательно получим $\mu^*(O \setminus E) \le \mu^*(O \setminus F) < 2\varepsilon$. Тем самым множество E измеримо.

2.14. Верно ли утверждение задачи 2,12, если замкнутое множество F заменить открытым множеством O, таким что $E \subset 0$ и $\mu^*(E) < \mu(O) + \varepsilon$?

Решение. Утверждение не верно, Рассмотрим неизмеримое множество E. Для любого ограниченного множества $E \subset \mathbf{R}^n$ существует верхняя мера Лебега $\mu^*(E) = \inf_{E \subset Q} \mu(Q)$, Q — открытые множества. Поэтому для множества E и любого $\varepsilon > 0$ можно построить открытое множество O: $E \subset 0$ и $\mu^*(E) < \mu(O) + \varepsilon$.

2.15. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность измеримых множеств в $\mathbf{R}^n$, такая что $A_n \subset A_{n+1}$. Доказать, что множество $A = \cup_{n=1}^\infty A_n$ — измеримо и $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Решение. Множество A измеримо, так как его можно представить в виде счетного объединения непересекающихся множеств: $A = A_1 \cup (\cup_{j=1}^\infty (A_{j+1} \setminus A_j))$.

Покажем, что $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Имеем $\mu(\cup_{k=1}^n A_k) = \mu(A_n)$. Последовательность $\mu(A_n)$ возрастающая. Если $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) < \infty$, то $\mu(\cup_{k=1}^n A_k) \le \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Тогда $\mu(\cup_{k=1}^\infty A_k) \le \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. С другой стороны, $\cup_{k=1}^\infty A_k \supset A_n$, $\mu(\cup_{k=1}^\infty A_k) \ge \mu(A_n)$, $n \in \mathbf{N}$. Следовательно $\mu(\cup_{k=1}^\infty A_k) \ge \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Итак, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. Если $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty$, то и $\mu(A) = \infty$.

2.16. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность измеримых множеств в $\mathbf{R}^n$, такая что $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что если $\mu(A_1) < \infty$, то множество $A = \cap_{n=1}^\infty A_n$ измеримо и $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Решение. Так как каждое множество A_n измеримо, то $CA_n = \mathbf{R}^n \setminus A_n$ также измеримо. Так как $A_n \supset A_{n+1}$, то $CA_n \subset CA_{n+1}$. Согласно задаче 2.15, множество $\cup_{n=1}^\infty CA_n$ измеримо. По закону двойственности, $C(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \cup_{n=1}^\infty CA_n$. Тем самым из измеримости множества $C(\cap_{n=1}^\infty A_n)$ следует измеримость множества $A = \cap_{n=1}^\infty A_n$.

Покажем, что $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Так как $\mu(A_n) \ge \mu(A_{n+1})$, $n \in \mathbf{N}$, то последовательность $\{\mu(A_n)\}$ невозрастающая и неотрицательная. Поэтому существует $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. С другой стороны,

$$\mu(\cap_{k=1}^n A_k) = \mu(A_n) \ge \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Тем самым $\mu(\cap_{k=1}^\infty A_k) \ge \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$, но $A = \cap_{n=1}^\infty A_n \subset A_n$, поэтому $\mu(A) \le \mu(A_n)$ или $\mu(A) \le \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Окончательно $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

2.17. Построить на плоскости множество, неизмеримое по Лебегу.

Решение. Пусть E — неизмеримое множество на отрезке $[0,1]$. Тогда множество $M = E \times [0,1]$ — есть множество неизмеримое на плоскости.

2.18. Пусть M — множество точек на плоскости, координаты (x,y) которых удовлетворяют условию: существует рациональное k, такое что $y = kx$. Определить меру множества M.

Решение. Мера множества M равна нулю, так как M есть объединение счетного числа прямых на плоскости, а каждая прямая имеет плоскую лебегову меру нуль.

2.19. В пространстве $\mathbf{R}^N$ для любого числа $\alpha \in (0,\infty)$ построить неограниченное измеримое множество меры α.

Решение. Например, множество $M = [0,\alpha] \times \underbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}_{N-1} \cup M_1$, где M_1 — множество точек, все координаты которых рациональны.

2.20. Может ли открытое неограниченное множество на прямой иметь конечную меру?

Решение. Да, может. Например в $\mathbf{R}^N$ множество $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$, где $M_n = \underbrace{(0,1) \times \cdots \times (0,1)}_{N-1} \times (n, n+\frac{1}{n^2})$ искомое. Множество M открыто, так как каждое из множеств M_n открыто, $\mu(M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$, M неограничено.

2.21. Определить меру множества точек в $\mathbf{R}^N$ у которых хотя бы одна координата рациональна.

Решение. Данное множество M представим в виде объединения конечного числа множеств $M_1, \ldots, M_N$, где M_i состоит из точек, у которых i-я координата рациональна. Каждое множество M_i состоит из объединения счетного числа множеств $M_i^n = \{x \in \mathbf{R}_N | x_i = r_n\}$, где $\{r_n\}$ — последовательность всех рациональных чисел. Так как $\mu(M_i^n) = 0$ для любых n и i, то $\mu(M) = \mu(\cup_{i,n} M_i^n) = 0$.

2.22. Рассмотрим в $\mathbf{R}^N$ множество точек, проекция которых на каждую координатную ось есть множество положительной меры на прямой. Может ли множество M иметь меру нуль?

Решение. Да, может. Например, объединение N отрезков $M = \cup_{k=1}^{N} M_k$, где $M_k = \{(x_1, \ldots, x_N) | x_k \in [0,1], x_j = 0, j \neq k\}$. Множество M имеет меру 0 в пространстве $\mathbf{R}^n$. Проекция множества M на каждую координатную ось есть отрезок $[0,1]$.

2.23. Привести пример последовательности $\{A_n\}$ измеримых множеств, такой что $A_n \supset A_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$, но $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \neq \mu(A)$, $A = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Решение. Такой пример возможен, если все множества A_n, $n \in \mathbf{N}$ неограничены. Например, $A_n = [n,\infty)$, $\mu(A_n) = \infty$, $A = \emptyset$, $\mu(A) = 0$.

§3 Мера как функция множеств, продолженная с полуколец на кольца множеств.

2.24. Пусть $X = \mathbf{Q} \cap [0,1]$, σ_μ состоит из пересечений множества X с произвольными интервалами (a,b), отрезками $[a,b]$ или полуинтервалами $(a,b]$, $[a,b)$ отрезка $[0,1]$. Показать, что σ_μ — полукольцо. Для каждого множества $A \in \sigma_\mu$ с концами a и b $(b \geq a)$ положим $\mu(A) = b - a$.

Показать, что μ — конечно-аддитивная мера. Выяснить, является ли μ σ-аддитивной мерой.

Решение. Так как система, состоящая из интервалов, отрезков и полуинтервалов является полукольцом, то и система σ_μ являетсяполукольцом и мера μ является конечно аддитивной. Покажем, что μ не является σ-аддитивной. Пусть $A = X$. Тогда $\mu(A) = 1$. С другой стороны, множество X счетно, $X = \cup_{n=1}^{\infty} r_n$, а $\mu(r_n) = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

2.25. Пусть X — произвольное бесконечное множество, $\{x_n\}$ — фиксированная последовательность элементов множества X. Каждому x_n поставим в соответствие число $\alpha_n > 0$, так чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ сходился. Для любого $A \subset X$ положим $\mu(A) = \sum_{n:x_n \in A} \alpha_n$ (если $A \cap \{x_n\} = \emptyset$, то $\mu(A) = 0$). Показать, что μ является σ-аддитивной мерой на множестве всех подмножеств множества X.

Решение. Функция $\mu(A)$ неотрицательна и $\mu(A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ для любого $A \subset X$. Если $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$, то

$$\mu(A) = \sum_{n:x_n \in A} \alpha_n = (\sum_{n:x_n \in A_1} \alpha_n) + (\sum_{n:x_n \in A_2} \alpha_n) + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

так как $A \cap \{x_n\} = \cup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{x_n\}$.

2.26. Пусть $f(x)$ — строго возрастающая функция действительного переменного x. На полукольце, состоящем из интервалов, полуинтервалов и отрезков ($[a,b]$, (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ введем функцию μ по формуле

$$\mu([a,b]) = \mu((a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b)) = f(b-0) - f(a+0).$$

Будет ли эта функция мерой?

Решение. Функция μ не обязана быть мерой. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, x \le 0, \\ x+1, x > 0, \end{cases}$$

имеющую в точке $x = 0$ скачок. Тогда функция μ не является аддитивной. Например, $[0,1] = \{0\} \cup (0,1]$. Но $\mu([0,1]) = \mu((0,1]) = \mu(0) = 1$, $\mu([0,1]) \ne \mu(\{0\}) + \mu((0,1])$.

2.27. Пусть $f(x)$ — строго возрастающая непрерывная функция. Показать, что функция μ из предыдущей задачи является мерой на полукольце, состоящем из интервалов, полуинтервалов, или отрезков. Будет ли она σ-аддитивной?

Решение. Покажем, что μ есть σ-аддитивная мера на полукольце интервалов. Так как функция $f(x)$ строго возрастающая и непрерывная, то $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$, $f((a,b]) = (f(a), f(b)]$, $f([a,b)) = [f(a), f(b))$, $f((a,b)) = (f(a), f(b))$. Поэтому если множество A принадлежит полукольцу, то $\mu(A) = m(f(A))$, где m — мера Лебега на прямой. Пусть множества A, A_i, $i \ge 1$, принадлежат полукольцу и $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$. Тогда $f(A) = \cup_{i=1}^{\infty} f(A_i)$,

$f(A_i) \cap f(A_j) = \emptyset$, $i \neq j$. В силу σ-аддитивности меры Лебега, и поскольку $\mu(A) = m(f(A))$, $\mu(A_i) = m(f(A_i))$, $i \geq 1$, имеем

$$\mu(A) = m(f(A)) = \sum_{i=1}^{\infty} m(f(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

что и требовалось доказать.

2.28. Пусть $X = [0,1] \times [0,1]$, R — кольцо множеств плоскости вида $E \times [0,1]$, где E — измеримое по Лебегу множество отрезка $[0,1]$. Введем функцию μ на кольце R по формуле $\mu(E \times [0,1] = m(E)$, где $m(E)$ — мера Лебега на прямой. Показать, что μ — σ-аддитивная мера на R. Пусть $S(R)$ — σ-кольцо всех подмножеств квадрата $[0,1] \times [0,1]$, измеримых относительно данной меры. Показать, что $[0,1] \times [0, \frac{1}{2}] \notin S(R)$.

Решение. Так как мера Лебега на прямой является σ-аддитивной, то мера μ является σ-аддитивной на R.

Покажем, что множество $[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ не будет измеримым по Лебегу относительно введенной меры. Напомним, что внешней мерой множества $A \subset X$ называется $\mu^*(A) = \inf \sum_n \mu(B_n)$, где нижняя грань берется по всем покрытиям множества A не более чем счетным семейством $\{B_n\}$ множеств из R. Множество A измеримо, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in R$: $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$. Поэтому для множества $A = [0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ получаем $\mu^*(A) = 1$. Пусть $B \subset R$. Тогда $B = E \times [0,1]$, где E — измеримо и $A \Delta B = (([0,1] \setminus E) \times [0, \frac{1}{2}]) \cup (E \times (\frac{1}{2}, 1])$. Поэтому $\mu(A \delta B) = m([0,1] \setminus E) + m(E) = 1$, что влечет неизмеримость множества A.

2.29. Пусть $X = [0,1] \times [0,1]$. Рассмотрим полукольцо множеств вида $I \times [0,1]$, где $I \subset [0,1]$ — интервал, полуинтервал, или отрезок. Введем функцию множеств μ по формуле $\mu(I \times [0,1]) = b - a$, где a, b — концы I ($a \leq b$). Показать, что μ — σ-аддитивная мера на этом полукольце. Пусть $S(R)$ — σ-кольцо всех подмножеств квадрата $[0,1] \times [0,1]$, измеримых относительно данной меры. Показать, что $[0,1] \times [0, \frac{1}{2}] \notin S(R)$.

Решение. Так как мера Лебега на прямой есть продолжение меры с полукольца, состоящего из полуинтервалов, интервалов и отрезков, то лебегово продолжение меры μ распространяется на σ-кольцо множеств вида $E \times [0,1]$, где E — измеримое по Лебегу множество на прямой, при этом $\mu(E) \times [0,1] = \mu(E)$. Доказательство неизмеримости множества $[0,1] \times [0, \frac{1}{2}]$ содержится в задаче 2.28.

2.30. Рассмотрим полуинтервал $(0,1]$ и полукольцо R, состоящее из всех интервалов, полуинтервалов и отрезков, с концами из полуинтервала $(0,1]$, и множеств вида $(0,a)$ и $(0,a]$. Введем на R функцию множеств по формуле $\mu(A) = b - a$, если a и b — концы множества A и $0 < a \leq b$ и $\mu((0,a)) = \mu((0,a]) = a + 1$. Показать, что μ — мера на полукольце, но ее нельзя продолжить до σ-аддитивной меры на σ-кольце.

Решение. Пусть $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$, $A, A_j \in R$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда, если 0 не является концом множества A, то 0 не является концом ни одного из множеств A_j и $\mu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$ в силу аддитивности меры Лебега на прямой.

Рассмотрим случай, когда $A = (0, a]$ или $A = (0, a)$. Тогда 0 является концом единственного интервала A_j. Без ограничения общности можно считать, что $j = 1$. Пусть b_1 — правый конец интервала A_1. Тогда, как и выше, $a - b_1 = \mu(A \setminus A_1) = \sum_{j=2}^{n} \mu(A_j)$. Так как $\mu(A) = a+1$, $\mu(A_1) = b_1 + 1$, то $\mu(A) = a+1 = b_1 + 1 + (a - b_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

Покажем, что μ не продолжается до $\sigma-$аддитивной меры на σ-кольце. Действительно, так как $(0,1] = \cup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, и $\mu((0,1]) = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu((\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]) = 1$, то $\mu((0,1]) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu((\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}])$.

2.31. Показать, что предположение о том, что исходная мера задана на полукольце, (а не на некоторой произвольной системе множеств), существенно для однозначности ее продолжения.

Решение. Известно, что мера, заданная на полукольце, однозначно продолжается на минимальное кольцо, содержащее данное полукольцо. Если же исходная система не является полукольцом, то ее продолжение на минимальное полукольцо, содержащее данную систему, вообще говоря, не однозначно. Например, рассмотрим систему из двух множеств $M_1 = [a,b] \times [0,1]$, $M_2 = [0,1] \times [a,b]$, $0 < a < b < 1$, $a \neq \frac{1}{3}$. Эта система не является полукольцом. Минимальное полукольцо, содержащее M_1 и M_2 состоит из восьми множеств: $\emptyset$, M_1, M_2, $M_3 = [a,b] \times (b,1]$, $M_4 = [a,b] \times [a,b]$, $M_5 = [a,b] \times [0,a)$, $M_6 = [0,a) \times [a,b]$, $M_7 = (b,1] \times [a,b]$. Введем меру, заданную на этом полукольце, двумя различными способами. В первом случае мерой множеств будем считать плоскую меру Лебега. Во втором случае положим $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(M_1) = \mu(M_2) = b - a$, $\mu(M_3) = \mu(M_4) = \mu(M_5) = \mu(M_6) = \mu(M_7) = \frac{b-a}{3}$. Данная мера μ — аддитивная.

2.32. Показать, что конечно-аддитивная (не обязательно знакоположительная функция, определенная на некотором полукольце подмножеств множества X может быть продолжена на минимальное кольцо, содержащее данное полукольцо, причем единственным образом. В частности, мера, заданная на полукольце, может быть продолжена единственным образом на минимальное кольцо, содержащее данное полукольцо.

Решение. Пусть f — аддитивная функция, заданная на полукольце σ_f, а $R(\sigma_f)$ — минимальное кольцо, содержащее σ_f. Тогда для любого $A \in R(\sigma_f)$ существует разложение $A = \cup_{k=1}^{n} B_k$, где $B_k \in \sigma_f$, $B_k \cap B_l = \emptyset$, $k \neq l$. Положим по определению $f'(A) = \sum_{k=1}^{n} f(B_k)$. Величина $f'(A)$ не зависит от выбора разложения A на множества B_k. На самом деле, пусть $A = \cup_{i=1}^{n} B_i = \cup_{j=1}^{m} C_j$, $B_i, C_j \in \sigma_f$. Так как $B_i \cap C_j \in \sigma_f$, то из аддитивности функции f, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} f(B_k) = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=1}^{m} f(B_k \cap C_j)) = \sum_{j=1}^{m} f(C_j).$$

Итак, функция f' есть продолжение аддитивной функции f с полукольца σ_f на кольцо $R(\sigma_f)$. Очевидно функция f' аддитивна.

§4. Измеримые функции.

2.33. Доказать, что непрерывная функция на измеримом множестве E конечной меры измерима.

Решение. Для любого $a \in \mathbf{R}$ рассмотрим множество $E_a = \{x | x \in E, f(x) \geq a\}$. Сначала предположим, что множество E замкнуто, Покажем, что тогда множество E_a также замкнуто, а следовательно и измеримо. Действительно, если x_0 — предельная точка последовательности $\{x_n\}$ элементов E_a, то $f(x_n) \geq a$, $n \in \mathbf{N}$, и в силу непрерывности функции $f(x)$, $f(x_0) \geq a$, то есть $x_0 \in E_a$.

Покажем теперь измеримость E_a, если E — измеримое множество. Так как E измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $E_\varepsilon \subset E$, такое что $\mu(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$. По доказанному выше, множество $E_a \cap E_\varepsilon$ замкнуто. Но $E_a \setminus (E_a \cap E_\varepsilon) \subset E \setminus E_\varepsilon$ и $\mu^*(E_a \setminus (E_a \cap E_\varepsilon)) \leq \mu^*(E \setminus E_\varepsilon) < \varepsilon$. Следовательно, E_a — измеримое множество.

2.34. Доказать, что множество точек, для которых последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, заданных на измеримом множестве E конечной меры, является сходящейся, есть измеримое множество.

Решение. Так как $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — последовательность измеримых функций, то для любых натуральных n, p и k множество $\{x : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$ измеримо. Так как множество A точек сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ можно представить в виде

$$A = \cap_{k=1}^\infty \cup_{N=1}^\infty \cap_{n=N}^\infty \cap_{p=1}^\infty \{x : |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}\},$$

то A — измеримое множество.

2.35. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет конечную производную всюду на отрезке $[a, b]$, то функция $f'(x)$ измерима на $[a, b]$.

Решение. По условию, $\forall x \in [a, b)\ \exists \lim_{n\to\infty} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) = f'(x)$. Рассмотрим отрезок $[a, b - \delta]$, $\delta \in (0, \frac{b-a}{2})$. При достаточно больших n функция $n(f(x+\frac{1}{n}) - f(x))$ определена и измерима на отрезке $[a, b-\delta]$, поскольку является непрерывной. Предел последовательности измеримых функций, заданных на измеримом множестве есть функция измеримая, т.е. $f'(x)$ измерима на отрезке $[a, b - \delta]$. Так как $[a, b) = \lim_{n\to\infty}[a, b - \frac{1}{n})$, то $f'(x)$ измерима на полуинтервале $[a, b)$, а значит и на отрезке $[a, b]$.

2.36. Доказать, что любая монотонная на отрезке $[a, b]$ функция измерима.

Решение. Пусть функция $f(x)$ монотонно неубывающая на отрезке $[a, b]$. Для любого $a \in \mathbf{R}$ множество $E_c = \{x : f(x) < c\}$ есть либо отрезок, либо полуинтервал, либо пустое множество, следовательно E_c — измеримое множество и функция $f(x)$ измерима.

2.37. Доказать, что непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции эквивалентны тогда и только тогда, когда они равны.

Решение. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, но не равны, то найдется точка $x_0 \in [a, b]$, такая что $f(x_0) \neq g(x_0)$, и следовательно, существует окрестность $U_\varepsilon(x_0) = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$, такая что $f(x) \neq g(x)$, $x \in U_\varepsilon(x_0) \cap [a, b]$. Но $\mu(U_\varepsilon(x_0) \cap [a, b]) > 0$.

2.38. Привести пример функции, измеримой по Лебегу, но неизмеримой по Борелю.

Решение. Например, характеристическая функция измеримого по Лебегу, но неизмеримого по Борелю множества (см. задачу 2.10.)

2.39. Пусть функция $f(x)$ такова, что для некоторого натурального p функция $(f(x))^p$ измерима. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ измерима?

Решение. Нет. Например, если $p = 2$ и $f(x)$ — характеристическая функция неизмеримого по Лебегу множества.

2.40. Верно ли, что суперпозиция измеримой функции и непрерывной функции есть функция измеримая?

Решение. Неверно. Рассмотрим функцию $\psi(x)$ и множества D и $E = \psi^{-1}(D)$, определенные в задаче 2.10. Напомним, что множество D неизмеримо, множество E измеримо, функция $\psi^{-1}(x)$ непрерывна. Пусть $f(x)$ — характеристическая функция множества E. Тогда $f(x)$ измерима, а суперпозиция $f(\psi^{-1})(x)$ неизмерима.

2.41. Привести пример ограниченной, измеримой по Лебегу на числовой прямой действительной функции, не эквивалентной никакой функции, интегрируемой по Риману.

Решение. Такой функцией является, например, характеристическая функция канторова множества положительной меры (то есть дополнение к всюду плотному открытому множеству меры $\alpha \in (0, 1)$, построенному в задаче 2.3). Множество точек разрыва данной функции имеет меру больше нуля, поэтому данная функция не эквивалентна никакой функции интегрируемой по Риману.

2.42. Привести пример действительнозначной функции, непрерывной на отрезке и отображающей измеримое множество на неизмеримое

Решение. Рассмотрим функцию ψ и множества E и D, рассмотренные в задаче 2.10. Функции ψ, ψ^{-1} непрерывны, множество D неизмеримо, множество $E = \psi^{-1}(D)$ измеримо.

2.43. Определить, будут ли следующие функции измеримы:

1. $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$, $x \in (0, 1)$;

2.

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{R} \setminus Q, \\ n, x \in \mathbf{Q}, x = \frac{m}{n}, n \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}, НОД(m, n) = 1; \end{cases}$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in E, \\ sinx, x \notin E, \end{cases}$$

где E — неизмеримое множество на числовой прямой;

4.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), x \in E, \\ \cos(x), x \notin E, \end{cases}$$

где $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, E — неизмеримое множество на интервале $(0, \frac{\pi}{2})$;

5.

$$f(x) = \begin{cases} g(x), x \in E, \\ 1 - g(x), x \notin E, \end{cases}$$

где $g(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$, $E \subset [a, b]$ — неизмеримое множество.

6.
$$f(x) = \begin{cases} k, x \in E_k, \\ 1, x \notin \cup_{k=1}^{\infty} E_k, \end{cases}$$

где E_k — попарно непересекающиеся неизмеримые множества на числовой прямой.

Решение. В случаях 1 и 2 функции измеримы, в случаях 3, 4, 6 функции неизмеримы. Покажем, что в случае 5 функция может быть как измеримой, так и неизмеримой. Действительно, если, например, $g(x) \equiv 0$ на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ неизмерима, так как множество $M = \{x : f(x) > 0\} = [a, b] \setminus E$ — неизмеримое.

Пусть теперь E_1 — неизмеримое множество на интервале $(\frac{a+b}{2}, b)$, $E = [a, b] \setminus E_1$,

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ \frac{1}{2}, x \in [\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}$$

Функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, \frac{a+b}{2}], \\ \frac{1}{2}, x \in [\frac{a+b}{2}, b]. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, измерима.

2.44. Привести пример последовательности измеримых функций, сходящейся по мере на некотором измеримом множестве, но не сходящейся ни в одной точке этого множества.

Решение. На множестве $(0, 1]$ рассмотрим последовательность функций

$$f_i^k(x) = \begin{cases} 1, \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k}, \\ 0, x \in (0, 1] \setminus (\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}], \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \in \mathbf{N}$. Занумеруем $f_i^k(x)$ подряд (при фиксированном k нумерация по возрастанию i). Данная последовательность сходится по мере к $f(x0 \equiv 0$, но расходится в каждой точке $x \in (0, 1]$.

2.45. Пусть $f(x, y)$ — измеримая функция, заданная на измеримом множестве $E \subset \mathrm{R}^2$ и для каждого $x \in \mathrm{R}$ множество $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ измеримо относительно меры на прямой. Следует ли отсюда, что при фиксированном x: $(x, y) \in E$ функция $f(x, y)$ как функция переменного y измерима на множестве E_x?

Решение. Не следует. Рассмотрим, например, множество $E = [0, 1] \times [0, 1]$, E' — неизмеримое множество на отрезке $[0, 1]$ и функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, x \neq 0, \text{ или } y \in [0, 1] \setminus E', \\ 1, x = 0, y \in E'. \end{cases}$$

Функция $f(x, y)$ измерима, так как множество $\{(x, y) | x = 0, y \in E'\}$ имеет плоскую меру нуль. Однако, при $x = 0$, функция $f(0, y)$ является характеристической для множества E', значит она неизмерима.

2.46. **Следует ли из сходимости почти всюду или всюду на множестве E последовательности непрерывных функций сходимость этой последовательности по мере на множестве E.**

Решение. Если $\mu(E) < \infty$, то по теореме Лебега из сходимости почти всюду следует сходимость по мере. Если же $\mu(E) = \infty$, то даже из сходимости всюду не следует сходимости по мере. Например,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, |x| < n, \\ 1, |x| \geq n+1, \\ |x| - n, n \leq |x| < n+1. \end{cases}$$

ГЛАВА III. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

§1. Основные свойства интеграла Лебега.

Пусть E — измеримое по Лебегу ограниченное множество в пространстве $\mathbf{R}^n$ и пусть f — вещественнозначная ограниченная функция, заданная на E. Совокупность измеримых по Лебегу множеств $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ называется *разбиением* множества E, если выполнены условия

$$E = \cup_{k=1}^{n} E_k, E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j.$$

Разбиение будем в дальнейшем обозначать символом P. Введем также следующие обозначения:

$$m_k = \inf_{x \in E_k} f(x), M_k = \sup_{x \in E_k} f(x), k = 1, 2, \ldots, n.$$

Для каждого разбиения P множества E и любой ограниченной функции f на E введем верхние и нижние интегральные суммы соответственно по формулам

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \mu(E_k), L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \mu(E_k).$$

Верхним интегралом Лебега функции f на множестве E назовем величину

$$I^* = \inf_{P} U(P, f),$$

а *нижним интегралом Лебега* — величину

$$I_* = \sup_{P} L(P, f),$$

где точная верхняя и точная нижняя грани берутся по всем разбиениям множества E. Легко видеть, что верхний и нижний интегралы Лебега существуют для любой ограниченной функции f на любом измеримом ограниченном множестве E в пространстве $\mathbf{R}^n$.

Функция f называется *интегрируемой по Лебегу* на измеримом множестве E, если $I^* = I_*$. При этом *интегралом Лебега* называется верхний (или нижний) интеграл Лебега и обозначается символом $\int_E f(x)dx$. Справедлива

Теорема 1. *Любая ограниченная измеримая по Лебегу на измеримом ограниченном множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ функция f интегрируема по Лебегу на этом множестве.*

Понятие интеграла Лебега можно распространить и на случай неограниченных функций. Пусть функция f измерима на измеримом ограниченном множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ и неотрицательна на E. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ введем функцию:

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \leq n, \\ n, \text{ если } f(x) > n. \end{cases}$$

Функция $[f(x)]_n$ называется *срезкой* функции f. В силу приведенной выше теоремы, для любого $n \in \mathbf{N}$ существует интеграл

$$I_n(f) = \int_E [f(x)]_n dx.$$

Если существует $\lim_{n\to\infty} I_n(f)$, то функция f называется *суммируемой по Лебегу* на множестве E и этот предел называется интегралом Лебега функции f на множестве E и обозначается тем же символом $\int_E f(x)dx$.

Пусть функция f является измеримой на измеримом ограниченном множестве E. Введем следующие неотрицательные функции:

$$f^+(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}, f^-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Функция f называется *суммируемой по Лебегу* на множестве E, если на E суммируемы функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$. При этом *интегралом Лебега* функции f называется число

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx.$$

Все суммируемые по Лебегу функции будем также называть *интегрируемыми по Лебегу.*

Откажемся теперь от условия ограниченности множества $E \subset \mathbf{R}^n$ и распространим определение интеграла Лебега на случай неограниченных измеримых множеств.

Пусть E — произвольное измеримое по Лебегу множество в пространстве $\mathbf{R}^n$ и $f(x)$ — измеримая неотрицательная функция, определенная на этом множестве. Функция f суммируема по Лебегу на множестве E, если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[-n,n]\cap E} f(x)dx.$$

Этот предел называется *интегралом Лебега* функции f на множестве E и обозначается, как и прежде, символом $\int_E f(x)dx$.

Если f – измеримая функция произвольного знака, то f называется суммируемой по Лебегу на множестве E, если суммируемы функции f^+ и f^-. При этом *интегралом Лебега* функции f на множестве E называется величина

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx.$$

Все суммируемые по Лебегу функции будем по прежнему называть интегрируемыми по Лебегу. Класс всех интегрируемых по Лебегу на множестве E функций будем обозначать символом $L(E,\mu)$. Интеграл Лебега обладает следующими свойствами:

1) Свойство линейности. Если $f,g \in L(E,\mu)$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, то функция $c_1 f + c_2 g \in L(E,\mu)$ и

$$\int_E (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_E f(x)dx + c_2 \int_E g(x)dx.$$

2) Свойство аддитивности. Если $f \in L(E,\mu)$ и $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, множества E_1 и E_2 измеримы по Лебегу, то $f \in L(E_j,\mu)$, $j = 1,2$ и

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

3) Свойство σ-аддитивности интеграла Лебега. Если $f \in L(E,\mu)$ и $E = \cup_{j=1}^{\infty} E_j$, $E_k \cap E_i = \emptyset$, $k \neq i$, множества E_j измеримы по Лебегу, то $f \in L(E_j,\mu)$, $j \in \mathbf{N}$ и

$$\int_E f(x)dx = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} f(x)dx.$$

4) Свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега как функции множеств (см. задачу 3.1). Если $f \in L(E,\mu)$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого подмножества $e \subset E$, мера которого $\mu(e) < \delta$ справедливо неравенство

$$|\int_e f(x)dx| < \varepsilon$$

5) Если $f,g \in L(E,\mu)$ и $f(x) \geq g(x)$ п.в. на E, то

$$\int_E f(x)dx \geq \int_E g(x)dx.$$

В частности, если $f(x) \geq 0$ п.в. на E, то $\int_E f(x)dx \geq 0$.

6) Пусть функция f измерима на измеримом множестве E. Тогда $f \in L(E,\mu) \iff |f| \in L(E,\mu)$. При этом

$$|\int_E f(x)dx| \leq \int_E |f(x)|dx.$$

7) Если $f \in L(E,\mu)$ и $\mu(E) = 0$, то $\int_E f(x)dx = 0$.

8) Пусть $f \in L(E,\mu)$ и $f \geq 0$ на E. Рассмотрим следующую функцию множеств

$$F(e) = \int_e f(x)dx,$$

где e — измеримое подмножество множества E. Функция F задает σ-аддитивную меру на σ-алгебре измеримых по Лебегу подмножеств множества E. Кроме того, если $\mu(E) = 0$, то $F(e) = 0$.

9) Если функция f интегрируема по Риману на множестве $E = [a,b]$, то $f \in L(E,\mu)$ и

$$(L)\int_E f(x)dx = (R)\int_E f(x)dx,$$

где слева в этом равенстве стоит интеграл Лебега, а справа — интеграл Римана. Аналогичное утверждение справедливо и для кратного интеграла Римана.

10) Если f — неотрицательная измеримая ограниченная функция на множестве E и $\int_E f(x)dx = 0$, то $f = 0$ п.в. на E.

§2. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

Теорема Лебега об ограниченной сходимости. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций, сходящаяся п.в. на измеримом множестве E к функции f. Если существует такая интегрируемая по Лебегу на E функция ϕ, что для всех n и п.в. на E*

$$|f_n(x)| \le \phi(x),$$

то функция f интегрируема по Лебегу на E и

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Следствие. *В условиях теоремы имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g(x)f_n(x)dx = \int_E g(x)f(x)dx,$$

где $g(x)$ — любая измеримая на E ограниченная функция.

Теорема Б. Леви. *Пусть последовательность измеримых функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет на измеримом множестве E условиям:*

1) $f_n \in L(E,\mu), n \in \mathbf{N}$;

2) $-\infty < f_1(x) \le f_2(x) \le \dots \le f_n(x) \le \dots, x \in E$;

3) $\exists K\colon \sup_n \int_E f_n(x)dx \le K$.

Тогда п.в. на E существует конечный предел $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, при этом $f \in L(E,\mu)$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

Следствие. *Если $\{f_n\}$ — последовательность измеримых неотрицательных функций определенных на измеримом множестве E и $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx < \infty$, то п.в. на E ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ сходится к интегрируемой функции и имеет место равенство*

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

Лемма Фату. *Пусть последовательность $\{f_n\}$ измеримых неотрицательных функций определена на измеримом множестве E и п.в. на E сходится к функции f. Если $f_n \in L(E,\mu)$, $n \in \mathbf{N}$ и существует постоянная K, такая что*

$$\int_E f_n(x)dx \le K, n \in \mathbf{N},$$

то $f \in L(E,\mu)$ и $\int_E f(x)dx \le K$.

Следствие. *Если в условиях леммы существует $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$, то $f \in L(E,\mu)$ и*

$$\int_E f(x)dx \le \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx.$$

§3. Теорема Фубини.

Пусть μ_n и μ_m — меры Лебега в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно, μ_{n+m} — мера Лебега в пространстве $\mathbf{R}^{n+m}$.

Теорема 2. *Пусть $E \subset \mathbf{R}^{n+m}$ — произвольное измеримое по Лебегу множество относительно меры μ_{n+m}. Положим*

$$E_x = \{y \in \mathbf{R}^m : (x,y) \in E\}, x \in \mathbf{R}^n,$$
$$E_y = \{x \in \mathbf{R}^n : (x,y) \in E\}, y \in \mathbf{R}^m.$$

Тогда для почти всех $y \in \mathbf{R}^m$ (соответственно $x \in \mathbf{R}^n$) множества $E_y \in \mathbf{R}^n$ (соответственно $E_x \in \mathbf{R}^m$) измеримы по Лебегу относительно меры μ_n (соответственно μ_m) в пространстве $\mathbf{R}^n$ (соответственно $\mathbf{R}^m$). Более того, функции $\mu_m(E_x)$ и $\mu_n(E_y)$ интегрируемы по Лебегу в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно и справедливо равенство

$$\mu_{n+m}(E) = \int_{\mathbf{R}^n} \mu_m(E_x)d\mu_n(x) = \int_{\mathbf{R}^m} \mu_n(E_y)d\mu_m(y).$$

Теорема Фубини. *Пусть E — измеримое множество в пространстве $\mathbf{R}^{n+m}$ и $f(x,y)$ — измеримая функция на E. Если $f(x,y)$ интегрируема по Лебегу на множестве E, то для п.в. $y \in \mathbf{R}^m$ существует $\int_{E_y} f(x,y)d\mu_n(x)$ (соответственно для п.в. $x \in \mathbf{R}^n$ существует $\int_{E_x} f(x,y)d\mu_m(y)$) и при этом справедливо равенство*

$$(*) \qquad \int_E f(x,y)d\mu_{n+m} = \int_{\mathbf{R}^m} (\int_{E_y} f(x,y)d\mu_n(x))d\mu_m(y) =$$
$$= \int_{\mathbf{R}^n} (\int_{E_x} f(x,y)d\mu_m(y))d\mu_n(x).$$

Следует отметить, что из существования только повторных интегралов не вытекает, вообще говоря, интегрируемость функции f на множестве E. Однако, если f измерима на множестве E и существует хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_{\mathbf{R}^m} (\int_{E_y} |f(x,y)|d\mu_n(x))d\mu_m(y), \int_{\mathbf{R}^n} (\int_{E_x} |f(x,y)|d\mu_m(y))d\mu_n(x),$$

то функция f интегрируема по Лебегу на множестве E и, тем самым, справедливо равенство $(*)$.

§4. Классы $L_p(E)$, $p \geq 1$.

Пусть множество $E \subset \mathbf{R}^n$ измеримо по Лебегу. Две измеримые функции f_1 и f_2 называются *эквивалентными* на множестве E, если $\mu(\{x \in E : f_1(x) \neq f_2(x)\}) = 0$. Например, если $f(x) = 0$ п.в., на E то $f(x)$ эквивалентна нулю на E.

Рассмотрим множество классов эквивалентности измеримых функций f для которых существует интеграл Лебега $\int_E |f(x)|^p dx$ (таким образом мы отождествляем эквивалентные функции). Это множество обозначается $L_p(E)$. Отметим, что $L_p(E)$ является линейным нормированным пространством, причем

$$||f||_{L_p(E)} = (\int_E |f(x)^p|dx)^{\frac{1}{p}}$$

(см. далее главу 5).

Измеримая функция на E называется *существенно ограниченной на* E, если существует число M, такое что $\mu(\{x \in E : f(x) > M\}) = 0$. Множество классов эквивалентности существенно ограниченных функций обозначается символом $L_\infty(E)$. Это множество является также линейным нормированным пространством, $||f||_{L_\infty(E)} = \inf\{M : |f(x)| \leq M \text{п.в.на} \quad E\}$. (см. главу 5).

Отметим, что множество непрерывных функций всюду плотно в $L_p(E)$, $1 \leq p < \infty$, то есть для любой функции $f \in L_p(E)$ найдется последовательность непрерывных на E функций $\{f_n\}$, таких что $\lim_{n\to\infty} ||f_n(x) - f(x)||_{L_p(E)} = 0$.

Назовем функцию f, определенную на отрезке $[a, b]$ ступенчатой, если она представима в виде конечной линейной комбинации характеристических функций интервалов, содержащихся в отрезке $[a, b]$. Множество ступенчатых функций всюду плотно в $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$.

Для любого $p \in [1, \infty)$ справедливо *интегральное неравенство Минковского*:

$$(\int_E |f(x) + g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \leq (\int_E |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} + (\int_E |g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}, f, g \in L_p(E).$$

Если числа $p, q \in [1, \infty)$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то справедливо *интегральное неравенство Гельдера*:

$$\int_E |f(x)g(x)|dx \leq (\int_E |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \cdot (\int_E |g(x)|^q dx)^{\frac{1}{q}}, f \in L_p(E), g \in L_q(E).$$

§5. Неопределенный интеграл Лебега.

Функция f, заданная на отрезке $[a, b]$ называется *абсолютно непрерывной*, на $[a, b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов (a_k, b_k) с суммой длин

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Имеет место следущая

Теорема Лебега. *1. Если $f \in L[a,b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$ (см. задачу 3.39).*

2. Если F абсолютно непрерывна на отрезке $[a,b]$, то производная $F'(x)$ определена п.в. на $[a,b]$, интегрируема на $[a,b]$ и имеет место равенство

$$\int_a^x F'(t)dt = F(x) - F(a).$$

Задачи

§1. Основные свойства интеграла Лебега.

3.1. Доказать абсолютную непрерывность интеграла Лебега как функции множеств.

Решение. Пусть $f \in L(A,\mu)$. Покажем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |\int_E f(x)dx| < \varepsilon$ для любого измеримого подмножества $E \subset A$, такого что $\mu(E) < \delta$. Рассмотрим множества $A_n = \{x \in A : n \le |f(x)| < n+1\}$, $B_n = \cup_{k=0}^{n} A_n$, $C_n = A \setminus B_n$. В силу σ-аддитивности интеграла Лебега, $\int_A |f(x)|dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|dx$, поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$, такое что

$$\int_{C_N} |f(x)|dx = \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{A_n} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $E \subset A$ и $\mu(E) < \delta = \frac{\varepsilon}{2(N+1)}$. Тогда

$$|\int_E f(x)dx| \le \int_E |f(x)|dx = \int_{E\cap B_N} |f(x)|dx + \int_{E\cap C_N} |f(x)|dx.$$

Оценим интегралы, стоящие справа

$$\int_{E\cap B_N} |f(x)|dx \le (N+1)\mu(E\cap B_N) \le (N+1)\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_{E\cap C_N} |f(x)|dx \le \int_{C_N} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3.2. Пусть $f \in L(E,\mu)$, $f \ge 0$. Доказать неравенство Чебышева:

$$\mu(\{x \in E : f(x) \ge c\}) \le \frac{1}{c}\int_E f(x)dx$$

для любого $c > 0$.

Решение. Пусть $E_1 = \{x \in E : f(x) \ge c\}$, тогда

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E\setminus E_1} f(x)dx \ge \int_{E_1} f(x)dx \ge C\mu(E_1).$$

3.3. Пусть функция f ограничена на отрезке $[a,b]$ и для любого $c \in [a,b]$ $\int_{[a,c]} f(x)dx = 0$. Доказать, что $f(x) = 0$ п.в. на отрезке $[a,b]$.

Решение. Так как для любого интервала $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ верно

$$\int_{(\alpha,\beta)} f(x)dx = \int_{[a,\beta]} f(x)dx - \int_{[a,\alpha]} f(x)dx = 0,$$

и так как любое открытое множество является объединением не более чем счетного числа интервалов, то $\int_O f(x)dx = 0$ для любого открытого множества $O \subset E$. Поэтому $\int_E f(x)dx = 0$ для любого измеримого множества $E \subset [a,b]$. Пусть $E_1 = \{x : f(x) \geq 0\}$, $E_2 = \{x : f(x) < 0\}$. Так как $\int_{E_1} f(x)dx = \int_{E_2} f(x)dx = 0$, то $f(x) = 0$ п.в. на $E_1 \cup E_2 = [a, b]$.

3.4. Существует ли интеграл Лебега по отрезку $[0,1]$ от функции $f(x)$ вида

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0, \\ \sin\frac{1}{x}, x \neq \frac{1}{\pi n}, n \in \mathbf{N}, \\ -1, x = \frac{1}{\pi n}, n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Решение. Функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[0,1]$ и измерима на отрезке $[0,1]$, так как она эквивалентна на $(0,1]$ непрерывной, а значит и измеримой функции $\sin\frac{1}{x}$. поэтому $f(x)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0,1]$.

3.5. Пусть $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, f ограничена на E и $\int_{E_n} f(x)dx = 0$, $n \in \mathbf{N}$. Следует ли отсюда, что f интегрируема по Лебегу на E и $\int_E f(x)dx = 0$?

Решение. Нет, не следует. Пусть $E = \mathbf{R}$, $E_n = [-n, n]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$$

Данная функция не интегрируема на E, однако удовлетворяет условиям задачи.

3.6. Пусть $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ — ограниченное множество, f ограничена и интегрируема на каждом E_n, $n \in \mathbf{N}$. Следует ли отсюда, что f интегрируема по Лебегу на E и $\int_E f(x)dx = 0$?

Решение. Не следует. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -\frac{1}{x}, x < 0, \end{cases}, E = [-1, 1], E_n = [-1, -\frac{1}{n}] \cup \{0\} \cup [\frac{1}{n}, 1], n \in \mathbf{N}.$$

Тогда f не интегрируема на $[-1, 1]$, хотя $\int_{E_n} f(x)dx = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

3.7. Привести пример функции, интегрируемой по Лебегу на отрезке $[0,1]$, но не ограниченной ни на каком отрезке $[a, b] \subset [0, 1]$.

Решение. Рассмотрим, например функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}, \\ n, x = \frac{n}{m}, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}, НОД(m, n) = 1. \end{cases}$$

Данная функция интегрируема, поскольку она равна нулю почти всюду на отрезке $[0,1]$.

3.8. Пусть f — неотрицательная измеримая функция, определенная на измеримом ограниченном множестве E. Доказать, что

$$f \in L(E, \mu) \iff \sum_{n=0}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty,$$

где $E_n = \{x : x \in E, n \leq f(x) < n + 1\}$.

Решение. Пусть $f \in L(E, \mu)$, тогда $\int_E f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f(x)dx$, следовательно последний ряд сходится. Но так как $\int_{E_n} f(x)dx \geq n\mu(E_n)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n)$ сходится.

Обратно, пусть $\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E_n) < \infty$. Пусть $[f(x)]_n$ — срезка функции $f(x)$. Тогда $I_n(f) = \int_E [f(x)]_n dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{E_k} f(x)dx + n\mu(E \setminus \cup_{k=0}^{n-1} E_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1}(k + 1)\mu(E_k) + n\sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\mu(E_k) = C < \infty$. Так как последовательность $\int_E [f(x)]_n dx$ неубывающая и ограниченная (константой C), то существует $\lim_{n\to\infty} I_n(f)$, значит f интегрируема на E.

3.9. Пусть функция $f(x)$ такова, что существует число $A \in \mathbf{R}$, такое что $\int_E f(x)dx = A$ для любого ограниченного измеримого множества $E \subset \mathbf{R}$. Следует ли отсюда, что $f(x)$ интегрируема на $\mathbf{R}$ и $\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = A$.

Решение. Следует и при этом $A = 0$ и $f = 0$ п.в. на $\mathbf{R}$. Действительно, пусть E — любое ограниченное измеримое подмножество вещественной прямой. Тогда множества $E_- = \{x \in E : f(x) < 0\}$ и $E_+ = \{x \in E : f(x) \geq 0\}$ измеримы, $E = E_- \cup E_+$, $A = \int_{E_-} f(x)dx \leq 0$, $A = \int_{E_+} f(x)dx \geq 0$. Поэтому $A = 0$, f=0 п.в. на E_- и на E_+, значит f=0 п.в. на E. Таким образом f=0 п.в. на $\mathbf{R}$.

3.10. Пусть $f(x)$ — неотрицательная функция, определенная на множестве $[a, b)$, где b конечно или $b = \infty$.

1. Доказать, что если существует несобственный интеграл Римана

$$(R)\int_a^b f(x)dx,$$

то $f \in L[a, b)$ и

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

2. Доказать, что верно и обратное: если существует интеграл Лебега

$$(L)\int_a^b f(x)dx$$

и функция $f(x)$ интегрируема по Риману на каждом отрезке $[a, c]$, $a < c < b$, то существует и несобственный интеграл Римана $(R)\int_a^b f(x)dx$ и они равны.[1]

[1]Аналогичное утверждение справедливо и в пространстве $\mathbf{R}^n$: если существует несобственный кратный интеграл Римана от неотрицательной функции $f(x)$ по множеству $\Pi =$

Решение. 1. Рассмотрим случай $b = \infty$. Случай конечного b рассматривается аналогично. Имеем $(R)\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(R)\int_a^{a+n} f(x)dx$. Согласно свойству 9), $(R)\int_a^{a+n} f(x)dx = (L)\int_a^{a+n} f(x)dx$, $n \in \mathbf{N}$. Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), x \in [a, a+n], \\ 0, x > a+n. \end{cases}$$

Так как $f_n \in L[a,\infty)$; $\forall x \in [a,\infty)$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ и

$$(L)\int_a^\infty f_n(x)dx \le (R)\int_a^\infty f(x)dx,$$

то по лемме Фату, $\exists (L)\int_a^\infty f(x)dx \le (R)\int_a^\infty f(x)dx$. С другой стороны, $\forall n \in \mathbf{N}$

$$(L)\int_a^\infty f(x)dx \ge (L)\int_a^\infty f_n(x)dx = (R)\int_a^{a+n} f(x)dx,$$

поэтому $(R)\int_a^\infty f(x)dx \le (L)\int_a^\infty f(x)dx$.

2. Для любого $c \in [a,b)$ имеем $(L)\int_a^c f(x)dx \le (L)\int_a^b f(x)dx$. Так как $(L)\int_a^c f(x)dx = (R)\int_a^c f(x)dx$, то функция $F(c) = (R)\int_a^c f(x)dx$ является неубывающей и ограниченной сверху числом $(L)\int_a^b f(x)dx$. Поэтому существует $(R)\int_a^b f(x)dx$. Далее следует применить 1.

3.11. Будет ли функция f интегрируема по Лебегу на E, если

1) $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$, $E = [-1,1]\times[-1,1]$;

2) $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $E_1 = [0,1]\times[0,1]$, $E_2 = [1,+\infty)\times[1,+\infty)$;

3) $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, $E = \mathbf{R}^2$;

4) $f(x,y) = \frac{1}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$, $E = \mathbf{R}^2$;

5) $f(x,y) = e^{-xy}\cos x \cos y$, $E = [0,+\infty)\times[0,+\infty)$;

6) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-p}$, $E = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \ge 1\}$;

7) $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$, $E = \mathbf{R}^3$;

8) $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = (1-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2)^{-\frac{1}{2}}$, $E = \{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 < 1\}$;

9) $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = e^{-\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j}$, **где** $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ **— симметричная положительно определенная матрица,** $E = \mathbf{R}^n$.

Решение. В случаях 1),3),5) функция f не интегрируема, в случаях 7),8),9) — интегрируема, в случае 2) функция f не интегрируема ни на E_1 ни на E_2. В случае 4) функция f интегрируема при $p > 1$, $q > 1$, в случае 6) функция f интегрируема при $p > \frac{3}{2}$. Указание: применить предыдущую задачу.

$\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}_n : x_j \in (a_j,b_j), 1 \le j \le n\}$, $-\infty \le a_j \le b_j \le \infty$, $1 \le j \le n$, то существует и интеграл Лебега от функции $f(x)$ по множеству Π и они равны. Верно и обратное: если $f(x)$ неотрицательна, существует $(L)\int_\Pi f(x)dx$ и $f(x)$ интегрируема по Риману в каждом параллелепипеде $\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}_n : x_j \in [c_j,d_j], 1 \le j \le n\}$, $a_j < c_j \le d_j < b_j$, $1 \le j \le n$, то существует и несобственный кратный интеграл Римана $(R)\int_\Pi f(x)dx$ и $(L)\int_\Pi f(x)dx = (R)\int_\Pi f(x)dx$.

3.12. Пусть $E = \cup_{k=0}^{\infty} E_k$, где $E_k = (2^k, 2^{k+1}]$. Определим функцию $f(x)$ вида

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \in E_{2n}, n \in \{0\} \cup \mathbf{N} \\ \frac{\cos x}{x}, x \in E_{2n+1}, n \in \{0\} \cup \mathbf{N}. \end{cases}$$

Существует ли интеграл Лебега от функции $f(x)$ по множеству E?

Решение. Функция f не интегрируема по Лебегу на множестве E, так как функция $|f|$ не интегрируема на множестве $E_1 = \cup_{n=1}^{\infty} E_{2n}$. На самом деле, оценим $\int_{E_{2n}} \frac{|\sin x|}{x} dx$:

$$\int_{E_{2n}} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_{2^{2n}}^{2^{2n+1}} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2^{2n+1}} \int_{2^{2n}}^{2^{2n+1}} |\sin x| dx.$$

Так как $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, то $\int_{2^{2n}}^{2^{2n+1}} |\sin x| dx \geq 2^{2n-1} - 1 \geq 2^{2n-2}$, $n \in \mathbf{N}$, отсюда $\int_{E_{2n}} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{8}$, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_{2n}} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится, следовательно функция f не интегрируема по Лебегу на множестве E.

§2. Предельный переход под знаком интеграла Лебега.

3.13. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ ограниченных неотрицательных функций, такая что $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx = 0$. Следует ли отсюда, что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ всюду на E, почти всюду на E?

Решение. Не следует даже сходимость почти всюду на E. Например рассмотрим последовательность функций $\{f_{nk}\}$:

$$f_{nk}(x) = \begin{cases} 1, x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}], \\ 0, x \in [0,1] \setminus [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}] \end{cases}, n \in \mathbf{N}, k = 1, \ldots n.$$

Строим последовательность $\{\phi_m\}$, состоящую из функций f_{nk}, занумерованных по возрастанию n, а при фиксированных n — по возрастанию k от 1 до n. Последовательность $\{\phi_m(x)\}$ не сходится ни в одной точке отрезка $[0,1]$, хотя $\lim_{m\to\infty} \int_{[0,1]} \phi_m(x) dx = 0$.

3.14. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых неотрицательных функций, заданная на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ конечной меры, такая что $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ почти всюду на E. Следует ли отсюда, что $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx = 0$?

Решение. Не следует. Рассмотрим, например, последовательность $\{f_n(x)\}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} n, x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 0, x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in (0, 1]$, но $\int_{[0,1]} f_n(x) dx = 1$, $n \in \mathbf{N}$.

3.15. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых неотрицательных функций, заданная на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ конечной меры, такая что $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx = 0$. Показать, что $f_n \to 0$ по мере на множестве E. Показать, что условие неотрицательности функций отбросить нельзя.

Решение. Пусть σ — любое положительное число. Используя неравенство Чебышева (см. задачу 3.2.): $\mu(X : x \in E, f_n(x) \geq \sigma) \leq \frac{1}{\sigma}\int_E f_n(x)dx$, получим $\lim_{n\to\infty} \mu(X : x \in E, f_n(x) \geq \sigma) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma}\int_E f_n(x)dx = 0$. Таким образом, последовательность $\{f_n\}$ сходится к нулю по мере на множестве E.

Условие неотрицательности функций $f_n(x)$ существенно, так как, например при $E = [-1, 1]$, $f_n(x) = sgn(x)$, имеем $\int_E f_n(x)dx = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

3.16. Доказать, что соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = 0$$

в случае, если $\mu(E) < \infty$ равносильно сходимости последовательности f_n к нулю по мере на множестве E. Показать, что условие $\mu(E) < \infty$ существенно.

Решение. Пусть последовательность $\{f_n\}$ сходится к нулю по мере на множестве E конечной меры. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $E_n := \{x \in E : |f_n(x)| \geq \varepsilon\}$. Так как $\{f_n\}$ сходится к нулю по мере, то $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$, в частности существует N: $\mu(E_n) < \varepsilon$ при $n \geq N$. Тогда при $n \geq N$ имеем

$$\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = \int_{E_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx + \int_{E\setminus E_n} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx <$$

$$< \int_{E_n} dx + \int_{E\setminus E_n} \varepsilon dx \leq \varepsilon + \varepsilon\mu(E \setminus E_n) \leq \varepsilon(1+\mu(E)).$$

Так как $\mu(E) < \infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то $\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = 0$.

Обратно, пусть

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = 0.$$

Тогда последовательность $\left\{\frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\right\}$ сходится к нулю по мере на множестве E (см. задачу 3.15), а значит и последовательность $\{f_n\}$ сходится к нулю по мере на множестве E.

Приведем пример последовательности $\{f_n(x)\}$, сходящейся к нулю по мере на $\mathbf{R}$, такой что $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \neq 0$. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x \in [n, 2n+1], \\ 0, x \in \mathbf{R} \setminus [n, 2n+1]. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к нулю по мере на $\mathbf{R}$, но

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx = \int_{[n,2n+1]} \frac{\frac{1}{n}dx}{\frac{1}{n}+1} = 1.$$

3.17. Пусть последовательность $\{f_n\}$ интегрируемых на множестве E функций сходится всюду на E к функции f и $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = 0$.

Следует ли отсюда интегрируемость функции f на множестве E? Если функция f интегрируема на E, то следует ли, что $\int_E f(x)dx = 0$?

Решение. Интегрируемость предельной функции не следует. Например,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, |x| \le \frac{1}{n}, \\ \frac{1}{x}, \frac{1}{n} < |x| \le 1, \end{cases}, E = [-1, 1].$$

Предельная функция $f(x)$ равна $\frac{1}{x}$ при $x \ne 0$. Она не интегрируема по Лебегу на $[-1, 1]$.

Если $f(x)$ интегрируема, то $\int_E f(x)dx$ не обязан равняться нулю. Например, если

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x = \{0\} \cup [-1, -\frac{1}{n}], \\ n, x \in (-\frac{1}{n}, 0), \\ 1, x \in (0, 1] \end{cases}, E = [-1, 1].$$

Тогда $\int_{[-1,1]} f_n(x)dx = 0$, $\int_{[-1,1]} f(x)dx = 1$.

3.18. Пусть $A \ne 0$. Привести пример равномерно сходящейся к нулю на всей числовой прямой последовательности непрерывных функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой $\int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx = A$, $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Например, последовательность $\{f_n\}$ такова:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, 0) \cup (2n, +\infty), \\ \frac{Ax}{n^2}, x \in [0, n), \\ -\frac{Ax}{n^2} + \frac{2A}{n}, x \in [n, 2n]. \end{cases}$$

3.19. Показать, что в теореме Лебега об ограниченной сходимости наличие мажорантной функции $\phi(x)$ не является необходимым условием, то есть привести пример последовательности функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, такой что

1) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in E$;

2) $f_n(x)$, $f(x)$ — интегрируемые на E функции, $n \in \mathbf{N}$;

3) $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$;

однако не существует интегрируемой на E функции $\phi(x)$, такой что $|f_n(x)| < \phi(x)$, $x \in E$, $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Пусть $E = \mathbf{R}$ и

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in (-\infty, -\frac{1}{n}) \cup (-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}) \cup (\frac{1}{n}, +\infty), \\ -n, x \in [-\frac{1}{n}, -\frac{1}{2n}], \\ n, x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \end{cases}, n \in \mathbf{N}$$

Предельная функция $f(x) \equiv 0$, $\int_{\mathbf{R}} f_n(x)dx = 0$, но интегрируемой мажорантной функции $\phi(x)$ не существует.

3.20. Пусть $f \in L(\mathbf{R}, \mu)$. Доказать, что ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + 2\pi n)$ сходится почти всюду на $\mathbf{R}$.

Решение. Так как $f \in L(\mathbf{R}, \mu)$, то $|f| \in L(\mathbf{R}, \mu)$. Имеем

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(2\pi n, 2\pi(n+1))} |f(x)|dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{(0,2\pi)} |f(x + 2\pi n)|dx = C.$$

По теореме Б. Леви ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f(x+2\pi n)|$ сходится п.в. на $\mathbf{R}$ к интегрируемой функции, значит ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)$ п.в. на $\mathbf{R}$ сходится абсолютно.

3.21. Пусть ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)$ сходится п.в. на $\mathbf{R}$. Следует ли отсюда, что $f \in L(\mathbf{R}, \mu)$?

Решение. Нет, не следует. Например, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, x = 0, \\ \frac{\sin(\frac{x}{2})}{x}, x \neq 0. \end{cases}$$

Тогда $f(2\pi n) = 0$, $f(x+2\pi n) = \frac{(-1)^n \sin(\frac{x}{2})}{x+2\pi n}$, $n \in \mathbf{Z}$, $x \neq 2\pi n$. Поэтому ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+2\pi n)$ сходится всюду на $\mathbf{R}$. Но $f(x) \notin L(\mathbf{R}, \mu)$, так как $|f(x)|$ не является интегрируемой по Лебегу на прямой.

§3. Теорема Фубини.

3.22. Пусть $E \subset \mathbf{R}^2$ — множество, плоская мера которого равна нулю. Доказать, что для почти всех x множество $E_x = \{y : (x,y) \in E\}$ имеет линейную меру равную нулю.

Решение. Пусть $\mu(E)$ — плоская мера множества E,а $\mu_y(E_x)$ — линейная мера множества E_x. По теореме 2,

$$\mu(E) = \int_{\mathbf{R}} \mu_y(E_x) d\mu_x.$$

Так как $\mu(E) = 0$ и $\mu_y(E_x)$ — неотрицательная функция, то $\mu_y(E_x) = 0$ для почти всех x.

3.23. Пусть множество $A \subset \mathbf{R}$ ограничено и измеримо относительно меры Лебега на прямой и $c > 0$. Доказать, что множество $E_c = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x \in A, 0 \leq y \leq c\}$ измеримо относительно плоской меры Лебега и $\mu(E_c) = c\mu_x(A)$ (здесь μ_x — мера Лебега на прямой, μ — мера Лебега на плоскости).

Решение. Если $A = (a,b)$, то множество E_c измеримо и $\mu(E_c) = c(b-a)$.

Если A — ограниченное открытое множество, то, поскольку A представимо в виде не более чем счетного числа непересекающихся интервалов, а мера Лебега σ-аддитивна, получаем, что E_c измеримо и $\mu(E_c) = c\mu_x(A)$. Аналогично, если A — ограниченное открытое множество и $\alpha < \beta$, то множество $\{x \in A, \alpha < y < \beta\}$ имеет плоскую меру $(\beta - \alpha)\mu_x(A)$.

Если A — ограниченное замкнутое множество, то E_c измеримо и $\mu(E_c) = c\mu_x(A)$ (в этом случае $A \subset (-R,R)$ для некоторого $R > 0$, $A = (-R,R) \setminus U$, где $U = (-R,R) \setminus A$ — открытое множество, $E_c = E_1 \setminus E_2$, $E_1 = \{x \in (-R,R), 0 \leq y \leq c\}$, $E_2 = \{x \in U, 0 \leq y \leq c\}$, E_1 и E_2 измеримы, $\mu(E_c) = \mu(E_1) - \mu(E_2) = c\mu_x(A)$).

Пусть A — ограниченное измеримое множество. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U_\varepsilon \supset A$, $\exists V_\varepsilon \subset A$, такие что U_ε — открытое множество на прямой, V_ε — замкнутое множество на прямой, $\mu(U_\varepsilon) < \mu(A) + \varepsilon$, $\mu(V_\varepsilon) > \mu(A) - \varepsilon$. Положим $G_\varepsilon = \{x \in U_\varepsilon, -\varepsilon < y < c + \varepsilon\}$, $F_\varepsilon = \{x \in V_\varepsilon, 0 \leq y \leq c\}$. Тогда $G_\varepsilon \supset E$ — открытое множество, $F_\varepsilon \subset E$ — замкнутое множество, $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) = \mu(G_\varepsilon) - \mu(F_\varepsilon) =$

$(c+2\varepsilon)(\mu_x(A)+\varepsilon) - c(\mu_x(A)-\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0+0$. Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то E измеримо и $\mu(E) = c\mu(A)$.

3.24. Пусть множество $A \subset \mathrm{R}$ ограничено и измеримо относительно меры Лебега на прямой, а $f \in L(A,\mu_x)$ — неотрицательная функция. Доказать, что множество $E = \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x \in A, 0 \le y \le f(x)\}$ измеримо относительно плоской меры Лебега и $\mu(E) = \int_A f(x)dx$ (здесь μ_x — мера Лебега на прямой, μ — мера Лебега на плоскости).

Решение. Покажем, что множество E измеримо по Лебегу.

а) Пусть A — ограниченное измеримое множество, $f(x)$ — ограниченная неотрицательная измеримая функция, принимающая не более чем счетное число значений. Используя результат задачи 3.23 и счетную аддитивность меры Лебега, получаем, что E измеримо и $\mu(E) = \int_E f(x)dx$.

б) Пусть теперь функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу и ограничена. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists A_1,\ldots,A_n$ — измеримые по Лебегу множества, такие что $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \ne j$, $A = \cup_{j=1}^n A_j$, а для функций

$$g_1(x) = \inf_{A_j} f(x), g_2(x) = \sup_{A_j} f(x), x \in A_j, 1 \le j \le n$$

справедливо равенство $\int_A g_2(x)dx - \int_A g_1(x)dx < \varepsilon$. Положим $E_i = \{x \in A, 0 \le y \le g_i\}$, $i = 1,2$. Согласно а), множества E_1 и E_2 измеримы, $\mu(E_2) - \mu(E_1) = \int_A g_1(x)dx - \int_A g_2(x)dx < \varepsilon$. Поскольку $E_1 \subset E \subset E_2$, то $\mu^*(E\Delta E_1) \le \mu^*(E_2\Delta E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1) < \varepsilon$. Поэтому E измеримо по Лебегу. Так как

$$\int_A g_1(x)dx = \mu(E_1) \le \mu(E) \le \mu(E_2) = \int_A g_2(x)dx,$$

$$\int_A g_1(x)dx \le \int_A f(x)dx \le \int_A g_2(x)dx,$$

то $\mu(E) = \int_A f(x)dx$.

в) Рассмотрим теперь общий случай. Положим $A_n = \{x \in A : n-1 \le f(x) < n\}$, $E_n = \{(x,y) : x \in A_n, 0 \le y \le f(x)\}$. Так как $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, и каждое из множеств E_n измеримо, то E измеримо,

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(x)dx = \int_A f(x)dx.$$

3.25. Пусть $f(x,y)$ — неотрицательная измеримая функция на $[0,1]\times[0,1]$. Доказать, что если существует повторный интеграл $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, то существуют и интегралы $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, $\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$ и они равны между собой.

Решение. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x,y)\}$, $f_n(x,y) = \min(f(x,y),n)$. Так как каждая функция $f_n(x,y)$ измерима и ограничена, то существует интеграл $\int_{[0,1]\times[0,1]} f_n(x,y)dxdy$ и по теореме Фубини

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f_n(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^1 f_n(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_0^1 f_n(x,y)dy.$$

Поскольку последовательность $\{f_n(x,y)\}$ является монотонно неубывающей и почти всюду сходящейся к $f(x,y)$ и $\int_{[0,1]\times[0,1]} f_n(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 f_n(x,y)dy \leq \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, то по теореме Б.Леви, $f(x,y)$ интегрируема на $[0,1]\times[0,1]$. Далее следует применить теорему Фубини.

3.26. Пусть $f(x,y)$ определена на множестве $E \subset \mathbf{R}^2$. Выполнены ли условия теоремы Фубини, если:

1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}, E = [-1,1]\times[-1,1];$$

2.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}, x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}, E = [-1,1]\times[-1,1];$$

3.
$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, 0 < y < x < 1, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, E = [0,1]\times[0,1];$$

4.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, x^2+y^2 = 0 \end{cases}, E = [0,1]\times[0,1];$$

5.
$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, E = [1,+\infty)\times[1,+\infty);$$

6.
$$f(x,y) = \sin(x^2+y^2), E = \mathbf{R}^2;$$

7.
$$f(x,y) = e^{-xy}\cos x \cos y, E = [0,+\infty)\times[0,+\infty);$$

8.
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, x > 0, y > 0, 0 \leq x - y \leq 1, \\ -1, x > 0, y > 0, 0 \leq y - x \leq 1, \\ 0 \text{ иначе}, \end{cases} E = \mathbf{R}^2;$$

9.
$$f(x,y) = \begin{cases} 2^{2n}, \frac{1}{2^n} \leq x < \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n} \leq y < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ -2^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}} \leq y < \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n} \leq y < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях}, \end{cases} E = [0,1]\times[0,1].$$

Доказать, что все повторные интегралы в указанных примерах существуют.

Решение. 1. Так как $\int_E |f(x,y)|dxdy \leq \int_{x^2+y^2\leq 2} |f(x,y)|dxdy$, а

$$\iint_{x^2+y^2\leq 2} |f(x,y)|dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\sqrt{2}} |cos\phi \sin\phi| r dr < \infty,$$

то применима теорема Фубини и

$$\iint_E f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \frac{xy}{x^2+y^2} dy = \int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \frac{xy}{x^2+y^2} dx = 0.$$

2. Повторные интегралы $\int_{-1}^{1} dy \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dx$, $\int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dy$ равны нулю,

$$\iint_E |f(x,y)|dxdy \geq \iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{|xy|}{(x^2+y^2)^2} dxdy = \int_0^{2\pi} |cos\phi \sin\phi| d\phi \int_0^1 \frac{dr}{r} = \infty.$$

Теорема Фубини не применима.

3. Так как $\iint_E |f(x,y)|dxdy \geq \int_0^1 \frac{dx}{x^2} \int_0^x dy = \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$, то теорема Фубини не применима.

4. Поскольку повторные интегралы $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dy$, $\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx$ существуют, но не равны, то теорема Фубини не применима.

5. Как и в предыдущем случае, повторные интегралы существуют, но не равны, то теорема Фубини не применима.

6. Повторные интегралы существуют и равны, интеграл $\iint_{\mathbf{R}^2} |\sin(x^2+y^2)|dxdy$ расходится, теорема Фубини не применима.

7. Повторные интегралы существуют и равны, интеграл $\iint_E |f(x,y)|dxdy$ расходится, поскольку

$$\iint_E |f(x,y)|dxdy \geq \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{E_n} |f(x,y)|dxdy = \infty,$$

где $E_n = 2\pi n \leq x \leq 2\pi n + \frac{\pi}{6}, \frac{1}{n} \leq y \leq \frac{2}{n}$, теорема Фубини не применима.

8. Оба повторных интеграла существуют, двойной интеграл $\iint_E |f(x,y)|dxdy$ расходится, теорема Фубини не применима.

9. Оба повторных интеграла существуют, но не равны, следовательно теорема Фубини не применима.

3.27. Пусть $E \subset [0,1]\times[0,1]$ — измеримое множество, такое что для любого c из отрезка $[0,1]$ пересечение множества E с прямой $x = c$ имеет линейную меру Лебега равную 1. Определить плоскую меру Лебега множества E.

Решение. По теореме Фубини $\mu(E) = \int_{[0,1]} \mu_y(E_x)dx = \int_{[0,1]} dx = 1$.

3.28. Пусть множество $E_1 \subset [0,1]$ неизмеримо по Лебегу, множество $E_2 \subset [0,1]$ счетно, $\chi(x,y)$ — характеристическая функция множества $E = E_1 \times E_2$. Применима ли теорема Фубини к функции $\chi(x,y)$ по квадрату $[0,1]\times[0,1]$.

Решение. Так как мера Лебега множества $[0,1]\times E_2$ равна нулю (см. задачу 3.23), и $E \subset [0,1]\times E_2$, то множество E измеримо и имеет меру Лебега равную нулю. Поэтому теорема Фубини справедлива.

3.29. Пусть последовательность неотрицательных на множестве $E \subset X \times Y$ функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ обладает свойствами:

1. $\sum_{k=1}^{n} f_k(x,y) \leq g(x,y)$, $n \in \mathbf{N}$;

2. функции f_n, $n \in \mathbf{N}$ и g удовлетворяет условиям теоремы Фубини. Доказать, что функция $f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,y)$ также удовлетворяет условиям теоремы Фубини.

Решение. Из условия следует, что функции $F_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x,y)$ образуют монотонную последовательность неотрицательных интегрируемых на E функций, причем $\int_E F_n(x,y)d\mu \le \int_E g(x,y)d\mu$. Так как $f(x,y) = \lim_{n\to\infty} F_n(x,y)$, то по теореме Б. Леви функция $f(x,y)$ интегрируема на множестве E, следовательно для нее выполнены условия теоремы Фубини.

Классы L_p, $p \ge 1$.

3.30. Пусть $p_1 > p_2 \ge 1$. Доказать, что если $f(x) \in L_{p_1}[a,b]$, то $f(x) \in L_{p_2}[a,b]$.

Решение. Используем интегральное неравенство Гельдера:

$$\int_a^b |f(x)|^{p_2} \cdot 1dx \le (\int_a^b |f(x)|^{p_2 \cdot \frac{p_1}{p_2}} dx)^{\frac{p_2}{p_1}} (\int_a^b 1dx)^{\frac{p_1-p_2}{p_1}} < \infty.$$

3.31. Привести пример функции, не эквивалентной нулю и принадлежащей пространству $L_p[a,\infty)$ для любого $p \ge 1$.

Решение. Например, функция $f(x)$, определенная следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, a \le x \le |a|+2, \\ \frac{1}{xln^2x}, x > |a|+2. \end{cases}$$

Так как несобственный интеграл Римана $\int_{|a|+2}^{\infty} \frac{1}{x^p ln^{2p} x} dx$ сходится при $p \ge 1$, то $f \in L_p[a,\infty)$ (см. задачу 3.10).

3.32. Для любого $p > 1$ привести пример функции $f \in L_p(0,\infty)$, такой что $f \notin L_{p-\varepsilon}(0,\infty)$ для любого $\varepsilon \in (0, p-1]$.

Решение. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, x < 2, \\ [\frac{1}{xln^2x}]^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

3.33. Пусть $1 \le p_1 \le p_2$. Доказать, что если $f(x) \in L_{p_j}[a,\infty)$, $j = 1,2$, то $f(x) \in L_p[a,\infty)$ при $p \in [p_1,p_2]$.

Решение. Так как справедливо равенство $|f(x)|^p \le |f(x)|^{p_1} + |f(x)|^{p_2}$ при $p \in [p_1,p_2]$, то существует интеграл $\int_{[a,\infty)} |f(x)|^p dx$, т.е. $f \in L_p[a,\infty)$.

3.34. Показать, что если $f_n, f \in L_p(E)$, $n \in \mathbf{N}$ и $\lim_{n\to\infty} \int_E |f(x) - f_n(x)|^p dx = 0$, то $\{f_n\}$ сходится к f по мере на множестве E.

Решение. Пусть $E_{n,c} = \{x : x \in E, |f_n(x) - f(x)|^p \ge c\}$. Используя неравенство Чебышева, получим $\mu(E_{n,c}) \le \frac{1}{c} \int_E |f_n(x) - f(x)|^p dx$. Отсюда следует, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к f по мере на множестве E.

3.35. При каких значениях α функция

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin(\frac{1}{x}), x \ne 0, \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

принадлежит $L_2[0,1]$?

Решение. $f \in L_2[0,1] \iff \int_0^1 x^{2\alpha} \sin^2(\frac{1}{x})dx < \infty$. Последний интеграл существует при $\alpha > -\frac{1}{2}$.

3.36. **Пусть** $f(x) \in L_p[a,b]$, $f(x) = 0$, $x \notin [a,b]$, $\phi_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$. **Показать, что**

1. $\int_{[a,b]} |\phi_h(x)|^p dx \leq \int_{[a,b]} |f(x)|^p dx$,[2]

2. $\lim_{h\to 0} \int_{[a,b]} |\phi_h(x) - f(x)|^p dx = 0$.[3]

Решение. Имеем

$$\int_a^b |\phi_h(x)|^p dx = \int_a^b \frac{1}{(2h)^p} |\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt|^p dx \leq \frac{1}{(2h)^p}\int_a^b dx (\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|dt)^p dx.$$

Из неравенства Гельдера имеем оценку

$$\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|dt \leq ||f||_{L_p[x-h,x+h]}||1||_{L_q[x-h,x+h]} = (\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \cdot (2h)^{\frac{1}{q}}$$

(здесь $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Поэтому $(\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|dt)^p \leq (2h)^{\frac{p}{q}} \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p dt$ и

$$\int_a^b |\phi_h(x)|^p dx \leq \frac{(2h)^{\frac{p}{q}}}{(2h)^p}\int_a^b dx \int_{x-h}^{x+h} |f(t)|^p dt =$$

$$= (2h)^{\frac{p}{q}-p} \int_{-h}^{h} dy \int_a^b |f(y+x)|^p dx \leq (2h)^{\frac{p}{q}-p+1} ||f||^p_{L_p[a,b]}.$$

Следовательно, $||\phi_h||_{L_p[a,b]} \leq (2h)^{(\frac{p}{q}-p+1)\frac{1}{p}} ||f||_{L_p[a,b]}$. Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $||\phi_h||_{L_p[a,b]} \leq ||f||_{L_p[a,b]}$.

Покажем, что справедливо утверждение (2). Поскольку $f(x) - \phi_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}[f(x) - f(t)]dt$, то аналогично предыдущим выкладкам имеем

$$\int_a^b |f(x) - \phi_h(x)|^p dx \leq (2h)^{\frac{p}{q}-p} \int_{-h}^{h} dy \int_a^b |f(y+x) - f(x)|^p dx.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(x) = 0$ вне (a,b), то $f(x)$ равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall x \in \mathbf{R}\ \forall y \in (-\delta, \delta)\ |f(x+y) - f(x)| < \varepsilon$. Поэтому при $|h| < \delta$

$$\int_a^b |f(x) - \phi_h(x)|^p dx \leq (2h)^{\frac{p}{q}-p} \int_{-h}^{h} dy (b-a)\varepsilon^p = (b-a)\varepsilon^p,$$

значит $\lim_{h\to 0} \int_{[a,b]} |\phi_h(x) - f(x)|^p dx = 0$.

Так как множество непрерывных функций всюду плотно в $L_p[a,b]$, то

$$\lim_{h\to 0} \int_{[a,b]} |\phi_h(x) - f(x)|^p dx = 0$$

---

[2] то есть $||\phi_h||_{L_p[a,b]} \leq ||f||_{L_p[a,b]}$.

[3] то есть $\lim_{h\to 0} ||\phi_h - f||_{L_p[a,b]} = 0$.

и в случае $f \in L_p[a,b]$, $f = 0$ вне $[a,b]$.

3.37. Пусть $f \in L_2(0,\infty)$ и $\int_0^\infty x^n f(x)dx = 0$ при $n \in \mathbf{N}$. Следует ли отсюда, что $f(x) = 0$ п.в. на $(0,\infty)$?

Решение. Покажем, что существует функция $f \in L_2(0,\infty)$ не равная нулю п.в. и такая, что $\int_0^\infty x^n f(x)dx = 0$ при $n \in \mathbf{N}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\sin(2\pi \ln x)}{x^{\ln x}}$. Для нее $\lim_{x\to 0+0} f(x) = 0$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^{\ln x}} < \frac{1}{x}$ для достаточно больших x, то $f \in L_2(0,\infty)$. С помощью подстановки $x = e^{t+\frac{n+1}{2}}$ имеем

$$\int_0^\infty x^n f(x)dx = (-1)^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \sin(2\pi t)dt = 0.$$

§5. Неопределенный интеграл Лебега.

3.38 Доказать, что абсолютно непрерывная функция имеет конечное изменение.[4]

Решение. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана абсолютно непрерывная функция $f(x)$. Найдем такое $\delta > 0$, что для всякой конечной системы попарно не пересекающихся интервалов $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$, для которых $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ следует $\sum_{k=1}^n |f(a_k) - f(b_k)| < 1$. Разобьем отрезок $[a,b]$ точками $c_0 = a < c_1 < \dots < c_N = b$ на такие части, что $c_{k+1} - c_k < \delta$, $0 \leq k \leq N-1$.

Тогда при всяком разложении сегмента $[c_k, c_{k+1}]$ на части, сумма абсолютных приращений функции f на этих частях окажется меньше единицы, поэтому $V_{c_k}^{c_{k+1}}(f) < 1$ и $V_a^b(f) < N$.

3.39. Пусть $f \in L[a,b]$. Рассмотрим неопределенный интеграл Лебега

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b].$$

Доказать, что $\Phi(x)$ есть абсолютно непрерывная функция.

Решение. Интеграл Лебега обладает свойством абсолютной непрерывности (см. задачу 3.1), то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $B \subset A$, $\mu(B) < \delta$ следует $\int_B |f(x)|dx < \varepsilon$. В частности, если сумма длин конечной системы взаимно не пересекающихся интервалов (a_k, b_k) меньше δ, то

$$\sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f(t)|dt < \varepsilon.$$

---

[4]Напомним, что функция f, заданная на отрезке $[a,b]$, называется функцией с ограниченным изменением, если существует константа $A > 0$, такая, что для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq A.$$

При этом величина

$$\sup_T \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1}| \equiv V_a^b(f)$$

называется полной вариацией функции f на $[a,b]$.

Но $|\Phi(b_k) - \Phi(a_k)| = |\int_{a_k}^{b_k} f(t)dt| \leq \int_{a_k}^{b_k} |f(t)|dt$, поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |\Phi(b_k) - \Phi(a_k)| < \varepsilon.$$

[5]

---

[5] Из доказанного утверждения следует, что неопределенный интеграл Лебега имеет п.в. конечную производную, являющуюся суммируемой функцией.

ГЛАВА IV. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§1. Тригонометрические ряды. Ряды Фурье. *Тригонометрическим рядом* называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \tag{1}$$

где a_0, a_n и b_n — вещественные числа ($n\in\mathbf{N}$). Эти числа называются *коэффициентами тригонометрического ряда.* Если тригонометрический ряд (1) сходится для всех $x\in\mathbf{R}$, то его сумма является периодической функцией с периодом 2π.

Ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}, \tag{2}$$

где $c_0=\frac{a_0}{2}$, $c_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$, $c_{-k}=\frac{a_k+ib_k}{2}$, $k\in\mathbf{N}$ называется *комплексной формой тригонометрического ряда (1).*

Частичные суммы рядов (1) и (2) имеют соответственно вид

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}.$$

Пусть $f\in L[0,2\pi]$. Рассмотрим тригонометрический ряд (1), где коэффициенты имеют вид

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx dx, k=0,1,2,\dots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx dx, k=1,2,\dots$$

Этот ряд называется *тригонометрическим рядом Фурье (или просто рядом Фурье) функции* f. В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sigma(f, x). \tag{3}$$

Частичные суммы ряда Фурье функции f будем обозначать

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{4}$$

Комплексная форма ряда Фурье функции f имеет вид $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$, где

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{int}dt, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если функция f четная, то ее ряд Фурье содержит одни косинусы, то есть $b_n = 0$, $n \in \mathbf{N}$. Если же функция f нечетная, то ее ряд Фурье содержит одни синусы, то есть $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$.

Справедливы теоремы:

Теорема 1. *Если $f \in C[0, 2\pi]$ и ряд Фурье функции f сходится равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$, то его сумма равна $f(x)$ при $x \in [0, 2\pi]$.*

Теорема 2. *Ряд Фурье любой функции $f \in L_2[0, 2\pi]$ сходится к ней в метрике $L_2[0, 2\pi]$, то есть*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}(f(x) - S_n(f, x))^2dx = 0.$$

Теорема Рисса-Фишера. *Если $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) < \infty$, то существует функция $f \in L_2[0, 2\pi]$, такая что*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx, k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx, k = 1, 2, \ldots$$

т.е. a_0, a_n, b_n являются коэффициентами Фурье некоторой функции $f \in L_2[0.2\pi]$.

Равенство Парсеваля. *Пусть $f \in L_2[0, 2\pi]$, a_0, a_n, b_n — коэффициенты Фурье функции f. Тогда*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

Функция

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

называется *ядром Дирихле*.

Пусть $f \in L[0, 2\pi]$ и f имеет период 2π, тогда для частичных сумм ряда Фурье (4) имеет место представление

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt.$$

Теорема 3. *Если f — суммируемая функция и при фиксированном x интеграл*

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}dt \tag{5}$$

существует при каком-либо $\delta > 0$, то частичные суммы $S_n(f, x)$ сходятся к $f(x)$.

Отметим, что условие существования интеграла (5) называется *условием Дини.*

Теорема 4. *Пусть f — ограниченная периодическая функция с периодом 2π, имеющая лишь разрывы первого рода, и пусть f имеет в каждой точке левую и правые производные. Тогда ее ряд Фурье сходится всюду и его сумма равна $f(x)$ в точках непрерывности и равна $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ в точках разрыва.*

Из методов суммирования рядов Фурье отметим методы суммирования Фейера и Абеля-Пуассона.

Пусть $S_n(f, x)$ $(n = 0, 1, \dots)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$. Средние арифметические частичных сумм ее ряда Фурье

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f, x), n \in \mathbf{N}$$

называются *фейеровскими средними порядка n* ряда Фурье функции $f(x)$. Для $f \in L[0, 2\pi]$ справедливо представление

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(u)[\frac{\sin\frac{n(u-x)}{2}}{\sin\frac{u-x}{2}}]^2 du.$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ суммируется методом Фейера (или $(C, 1)$) методом в точке x_0 к числу S, если $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f, x_0) = S$.

Теорема Фейера. *(см. задачу 4.11) Пусть $f \in L[0, 2\pi]$ и f имеет период 2π. Тогда:*

1. Если x_0 есть точка непрерывности функции f или точка разрыва первого рода, то в этой точке ряд Фурье функции f суммируется методом Фейера соответственно к $f(x_0)$ или к $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

2. Если $f \in C[a,b]$, то последовательность $\{\sigma_n(f,x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$.

3. Если $f \in C[0,2\pi]$ и $f(0) = f(2\pi)$, то последовательность $\{\sigma_n(f,x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[0,2\pi]$.

Пуассоновскими средними ряда Фурье функции $f(x)$ называются функции

$$f(r,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)r^k, r \in [0,1).$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ суммируется методом Абеля-Пуассона в точке x_0 к числу S, если $\lim_{r\to 1-0} f(x_0,r) = S$.

Справедлива

Теорема Фробениуса. *Если ряд суммируем методом Фейера к S, то он суммируем и методом Пуассона-Абеля к S.*

Если f имеет период $2l$, $l > 0$, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{\pi nx}{l} + b_n \sin\frac{\pi nx}{l}),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx, k = 0,1,2,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx, k = 1,2,\ldots$$

§2. Преобразование Фурье.

Пусть $f \in L_1(\mathbf{R})$. Тогда для любой точки $\xi \in \mathbf{R}$ существует интеграл

(6) $$F(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x)dx,$$

который называется *преобразованием Фурье* (образом Фурье) функции f. Более того, функция f непрерывна на $\mathbf{R}$ и $\lim_{\xi\to\infty} F(f)(\xi) = 0$ (см. задачи 4.19. и 4.22.).

Наряду с преобразованием Фурье функции f введем *обратное преобразование Фурье* функции g следующим образом:

(7) $$F^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)e^{-ix\xi}d\xi,$$

считая, что интеграл в (7) сходится в каком-либо смысле.

Для каждой функции $f \in L_1(\mathbf{R})$ интеграл (при условии, что он существует)

$$v.p.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi}F(f)(\xi)d\xi = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(y-x)}f(y)dy]d\xi$$

называется разложением этой функции в интеграл Фурье.

Теорема 5. *Если функция $f \in L(\mathbf{R})$ удовлетворяет в точке x условию Дини, то имеет место равенство*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\lambda(t-x)}\, dt.$$

Преобразование Фурье в пространстве $L_2(\mathbf{R})$.

Если $f \in L_2(\mathbf{R})$, то интеграл (6) может и не существовать. Однако преобразование Фурье функции f можно определить.

Теорема Планшереля. *Пусть $f \in L_2(\mathbf{R})$. Тогда для любого $A > 0$ интеграл*

$$g_A(\lambda) = \int_{-A}^{A} f(x) e^{i\lambda x} dx$$

представляет собой функцию $g_A \in L_2(\mathbf{R})$. При $A \to \infty$ функции g_A сходятся в метрике $L_2(\mathbf{R})$ к некоторому пределу g, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\lambda = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Функцию g называют преобразованием Фурье функции $f \in L_2(\mathbf{R})$. Если f также принадлежит $L_1(\mathbf{R})$, то соответствующая функция g совпадает с преобразованием Фурье функции f в обычном смысле.

Задачи

§1. Тригонометрические ряды .

4.1. Пусть $\{\lambda_n\}$ — неотрицательная монотонно стремящаяся к нулю последовательность. Доказать, что тригонометрические ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx$ сходятся равномерно на отрезке $[\delta, 2\pi-\delta]$, $0 < \delta < 2\pi$ и тем самым суммы этих рядов являются непрерывными функциями на интервале $(0, 2\pi)$.

Решение. Так как

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{-\cos(n+\frac{1}{2})x + \cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

то при $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ имеем

$$|\sum_{k=1}^{n} \cos kx| \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}, |\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \le \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Применяя признак Дирихле-Абеля равномерной сходимости, получаем, что на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ ряды сходятся равномерно. Таким образом суммы рядов являются непрерывными функциями на интервале $(0, 2\pi)$.

4.2. Доказать, что если функция $f(x)$ ограничена и суммируема на отрезке $[0, 2\pi]$, то есть $m \le f(x) \le M$, $f \in L_1[0, 2\pi]$, то ее фейеровские средние удовлетворяют тем же оценкам: $m \le \sigma_n(x) \le M$, $n \in \mathbf{N}$.

Решение. Так как

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(u)[\frac{\sin\frac{n(u-x)}{2}}{\sin\frac{u-x}{2}}]^2du, \sigma_n(1,x) = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi}[\frac{\sin\frac{n(u-x)}{2}}{\sin\frac{u-x}{2}}]^2du = 1,$$

то $m \leq \sigma_n(f,x) \leq M$.

4.3. Доказать, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ равномерно ограничены, то есть существует число C, такое что $|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}| \leq C$, $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$.

Решение. Исходя их разложения функции $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ в ряд Фурье,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

$x \in (0, 2\pi)$ и используя задачу 4.2., получим, что фейеровские средние функции $f(x)$ ограничены, а именно $-\frac{\pi}{2} \leq \sigma_n(f,x) \leq \frac{\pi}{2}$. А так как

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\frac{\sin kx}{k} = S_{n-1}(f,x) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin kx,$$

то $|S_n(f,x)| \leq \frac{\pi}{2} + 1$.

4.4. Пусть $f \in L_1[0, 2\pi]$. Доказать. что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ сходится.

Решение. Пусть $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. Тогда $\lim_{n\to\infty} S_n(g,x)f(x) = g(x)f(x)$. Используя результат задачи 4.3., получаем $|S_n(g,x)f(x)| \leq (\frac{\pi}{2}+1)|f(x)|$. Поэтому по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} S_n(g,x)f(x)dx = \int_0^{2\pi} g(x)f(x)dx,$$

но $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S_n(g,x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{k}$, следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ сходится.

4.5. Привести пример тригонометрического ряда сходящегося в каждой точке отрезка $[0, 2\pi]$, который не является рядом Фурье никакой интегрируемой по Лебегу функции на $[0, 2\pi]$.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{lnn}$. По признаку Дирихле-Абеля этот ряд сходится на отрезке $[0.2\pi]$. Если данный ряд являлся бы рядом Фурье, то, согласно задаче 4.5., ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{nlnn}$ сходился бы. Противоречие.

4.6. Привести пример сходящегося тригонометрического ряда на $[0, 2\pi]$, который не является рядом Фурье никакой функции $f \in L_2[0, 2\pi]$.

Решение. Если $f \in L_2[0, 2\pi]$, то $f \in L_1[0, 2\pi]$, поэтому достаточно применить предыдущую задачу.

4.7. Рассмотрим ряд $\frac{q_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \cos\nu x$, где $q_\nu > 0$ и монотонно стремится к нулю. Доказать, что если разности $\Delta q_\nu = q_\nu - q_{\nu+1}$ монотонно убывают при $\nu \to \infty$, то сумма ряда $f(x) = \frac{q_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \cos\nu x$ неотрицательна, $f \in L[0, 2\pi]$ и данный ряд является рядом Фурье функции $f(x)$.

Решение. Применим преобразование Абеля к частичной сумме $S_n(x) = \frac{q_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu \cos\nu x$. Так как $\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos\nu x = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$, $0 < x < 2\pi$, то

$$S_n(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}[\sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta q_\nu \sin(\nu+\frac{1}{2})x + q_n \sin(n+\frac{1}{2})x].$$

Снова применим преобразование Абеля:

$$S_n(x) = \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \sum_{\nu=0}^{n-2} \Delta^2 q_\nu (1-\cos(\nu+1)x) + \Delta q_{n-1}\frac{1-\cos nx}{4\sin^2\frac{x}{2}} + q_n \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

где $\Delta^2 q_\nu = \Delta q_\nu - \Delta q_{\nu+1}$ (мы учли, что $\sum_{\nu=0}^{m} \sin(\nu+\frac{1}{2})x = \frac{1-\cos(m+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$). Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}, 0 < x < 2\pi.$$

Поскольку $\Delta^2 q_\nu \geq 0$ и ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu$ сходится, то ряд (*) сходится на $(0,2\pi)$ и $f(x)$ неотрицательна. Докажем интегрируемость функции $f(x)$. Если мы докажем, что ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}dx$ сходится, то по следствию теоремы Б. Леви, $f \in L[0,2\pi]$ и

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}dx.$$

Поскольку

$$\frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{\nu} \sin(k+\frac{1}{2})x = \sum_{k=0}^{\nu}(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{k} \cos mx),$$

то $\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}dx = \pi(\nu+1)$.

Осталось показать, что ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\Delta^2 q_\nu$ сходится. Пусть $a_\nu = \Delta q_\nu$, тогда ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu = q_0$ — сходится и a_ν монотонно убывает, поэтому $\nu a_\nu \to 0$ при $\nu\to\infty$. Тогда $\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)(a_\nu - a_{\nu+1}) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu - na_n$ или $\sum_{\nu=0}^{n-1}(\nu+1)\Delta^2 q_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta q_\nu - na_n$. Поэтому ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\Delta^2 q_\nu$ сходится, $f \in L[0,2\pi]$, $\int_0^{2\pi} f(x)dx = \pi q_0$.

Умножим обе части равенства (*) на $\cos nx$ $(n \in \mathbf{N})$ и проинтегрируем по отрезку $[0,2\pi]$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (**)

$$\int_0^{2\pi} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} \cos nx dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta^2 q_\nu \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(\nu+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} cosnxdx.$$

Рассуждая как выше получаем, что правая часть равенства (**) равна πq_n. Таким образом $q_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$. Поскольку функция $f(x)$ является периодической и четной, то $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = 0$, $n \in \mathbf{N}$. Поэтому ряд $\frac{q_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} q_\nu \cos \nu x$ является рядом Фурье своей суммы.

4.8. Привести пример функции $f \in L[0, 2\pi]$, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ расходятся, где $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx$. Сравнить с задачей 4.4.

Решение. Рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$. Функция $f(x)$ интегрируема согласно предыдущей задаче, $a_n = \frac{1}{\ln n}$, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ расходится.

4.9. Пусть $\lambda_n > 0$, λ_n монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n}$ сходится. Доказать, что тригонометрические ряды $\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin nx$ являются рядами Фурье своих сумм.

Решение. Докажем утверждение для ряда $\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cos nx$. Для второго ряда доказательство аналогично. Пусть $Q_n = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$, $Q = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{j}$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_n}{n(n+1)} = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_\nu}{\nu} = \frac{\lambda_0}{2} + Q.$$

(мы учли, что $\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\nu}$).

Пусть $\frac{\pi}{n+1} \le x \le \frac{\pi}{n}$. Для этих x представим функцию $f(x)$ в виде $f(x) = (\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \cos \nu x) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \lambda_\nu \cos(\nu x)$, тогда $|\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \cos \nu x| \le Q_n$, и используя лемму Абеля[1], получим

$$|\sum_{\nu=n+1}^{n+m} \lambda_\nu \cos(\nu x)| \le \frac{2\lambda_{n+1}}{\sin\frac{x}{2}} \le \frac{2\pi}{x}\lambda_{n+1} < 2(n+1)\lambda_n.$$

Устремляя m к бесконечности, получаем $|f(x)| \le Q_n + 2(n+1)\lambda_n$, поэтому

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|dx = 2\int_0^{\pi} |f(x)|dx = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n+1}}^{\frac{\pi}{n}} |f(x)|dx \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n(n+1)}[Q_n + 2(n+1)\lambda_n] = \pi(\frac{\lambda_0}{2} + 3Q).$$

Тем самым функция $f(x)$ интегрируема.

4.10. Пусть $f \in L[0, 2\pi]$. Доказать, что коэффициенты Фурье $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx$ и $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx$ стремятся к 0 при $n \to \infty$.

Решение. Покажем, что $\lim_{n\to\infty} a_n(f) = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0$.

I. Рассмотрим случай $f \in C[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$. Продолжим периодически $f(x)$ на $\mathbf{R}$ с периодом равным 2π. В выражении для $a_n(f)$ сделаем замену $x = t + \frac{\pi}{n}$. Так как f периодична, то

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f(t + \frac{\pi}{n})\cos(nt + \pi)dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{2\pi-\frac{\pi}{n}} f(t + \frac{\pi}{n})\cos ntdt =$$

---

[1] то есть $|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k v_k| \le 2u_{n+1}V$, где последовательность $\{u_n\}$ невозрастающая и монотонно сходится к нулю и $|\sum_{k=1}^{n} v_k| \le V$, $k \in \mathbf{N}$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t+\frac{\pi}{n})\cos nt dt.$$

Отсюда $2\pi a_n(f) = \int_0^{2\pi}(f(t) - f(t+\frac{\pi}{n}))\cos nt dt$. Так как функция f непрерывна и периодична, то она равномерно непрерывна на $\mathbf{R}$, в частности $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n \geq N(\varepsilon)$ $\forall t \in \mathbf{R}$ справедливо $|f(t) - f(t+\frac{\pi}{n})| < \varepsilon$. Поэтому $|a_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varepsilon dt = \varepsilon$ при $n \geq N(\varepsilon)$, то есть $\lim_{n\to\infty} a_n(f) = 0$.

II. Рассмотрим общий случай $f \in L[0, 2\pi]$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Тогда существует $\phi \in C[0, 2\pi]$, такая что $\phi(0) = \phi(2\pi)$ и $\int_0^{2\pi}|f(t) - \phi(t)|dt < \frac{\pi\varepsilon}{2}$. Так как $a_n(f) = a_n(\phi) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(t) - \phi(t))\cos nt dt$, то $|a_n(f)| \leq |a_n(\phi)| + \frac{\varepsilon}{2}$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Согласно I, существует N,такое что $|a_n(\phi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq N$. Окончательно, при $n \geq N$ получаем $|a_n(f)| < \varepsilon$, значит $\lim_{n\to\infty} a_n(f) = 0$.

4.11. Пусть $f \in L[0, 2\pi]$ и f периодична с периодом 2π. Доказать теорему Фейера:

1. Если f непрерывна в точке x_0, то в этой точке ряд Фурье функции f суммируется методом Фейера[2] к $f(x_0)$.

2. Если $f \in C[a, b]$, то последовательность $\{\sigma_n(f, x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

3. Если $f \in C[0, 2\pi]$ и $f(0) = f(2\pi)$, то последовательность $\{\sigma_n(f, x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

4. Если x_0 есть точка разрыва первого рода, то в этой точке ряд Фурье функции f суммируется методом Фейера[3] к $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

Решение. 1. Рассмотрим сначала случай функции $f(x)$ непрерывной в точке x_0.

Пусть

$$K_n(u) = \frac{1}{2\pi n}[\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}]^2.$$

Тогда $K_n(u) \geq 0$, $K_n(-u) = K_n(u)$,

$$\sigma_n(f, x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(u + x_0)K_n(u)du, \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)du = 1.$$

Поэтому при $\delta \in [0, \pi]$

$$|\sigma_n(f, x_0) - f(x_0)| = |\int_{-\pi}^{\pi}(f(u + x_0) - f(x_0))K_n(u)du| \leq I_n^1(x_0) + I_n^2(x_0),$$

где

$$I_n^1(x_0) = \int_{|u|\leq\delta}|f(u + x_0) - f(x_0)|K_n(u)du,$$

$$I_n^2(x_0) = \int_{\delta\leq|u|\leq\pi}|f(u + x_0) - f(x_0)|K_n(u)du.$$

[2] Тем самым и методом Пуассона-Абеля

[3] Тем самым и методом Пуассона-Абеля

Имеем

$$I_n^1(x_0) \le \sup_{|u|\le\delta} |f(u+x_0)-f(x_0)| \int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)du = \sup_{|u|\le\delta} |f(u+x_0)-f(x_0)|.$$

Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0$: $\sup_{|u|\le\delta}|f(u+x_0)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда $I_n^1(x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$ для любого n.

Оценим $I_n^2(x_0)$. Так как при $\delta\le|u|\le\pi$ имеем $|K_n(u)|\le\frac{1}{2\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}}$, то

$$I_n^2(x_0) \le \frac{1}{2\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |f(u+x_0)-f(x_0)|du \to 0$$

при $n\to\infty$. Значит для достаточно больших n верно $I_n^2(x_0)<\frac{\varepsilon}{2}$ и, тем самым, $|\sigma_n(f,x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$.

2. Пусть $f\in C[a,b]$ и $[\alpha,\beta]\subset(a,b)$. Рассмотрим отрезок $[\alpha_1,\beta_1]$, где $a<\alpha_1<\alpha<\beta<\beta_1<b$. Так как $f\in C[\alpha_1,\beta_1]$, то f равномерно непрерывна на отрезке $[\alpha_1,\beta_1]$, поэтому $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)\in(0,\pi)$: $\alpha_1\le\alpha-\delta$, $\beta_1\ge\beta+\delta$ и $\sup_{|u|\le\delta,x\in[\alpha,\beta]}|f(u+x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Аналогично 1., при $x\in[\alpha,\beta]$ имеем $|\sigma_n(f,x)-f(x)|\le I_n^1(x)+I_n^2(x)$,

$$I_n^1(x) \le \sup_{|u|\le\delta}|f(u+x)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для оценки $I_n^2(x)$ учтем, что f ограничена на $[\alpha,\beta]$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(u+x)-f(x)|du \le \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|dt + 2\pi|f(x)| \le C$$

для некоторого $C>0$ и любого $x\in[\alpha,\beta]$, поэтому $I_n^2(x)\le C\frac{1}{2\pi n\sin^2\frac{\delta}{2}}<\frac{\varepsilon}{2}$ для достаточно больших n и, тем самым, $|\sigma_n(f,x_0)-f(x_0)|<\varepsilon$.

3. Пусть $f(0)=f(2\pi)$, $f\in C[0,2\pi]$. Так как f имеет период 2π, то $f\in C(\mathrm{R})$, в частности $f\in C[-\pi,3\pi]$. Согласно 2., последовательность $\{\sigma_n(f,x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[0,2\pi]$.

4. В силу четности функции $K_n(u)$ имеем

$$\int_{-\pi}^{0} K_n(u)du = \int_{0}^{\pi} K_n(u)du = \frac{1}{2}.$$

Таким образом

$$\sigma_n(f,x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} = \int_0^{\pi}(f(u+x_0)-f(x_0+0))K_n(u)du +$$

$$+\int_{-\pi}^{0}(f(u+x_0)-f(x_0-0))K_n(u)du.$$

При $\delta \in (0, \pi)$ имеем

$$|\sigma_n(f, x_0) - \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}| \le J_1(n) + J_2(n) + J_3(n) + J_4(n),$$

где

$$J_1(n) = \int_0^\delta |f(u + x_0) - f(x_0 + 0)| K_n(u) du,$$

$$J_2(n) = \int_{-\delta}^0 |f(u + x_0) - f(x_0 - 0)| K_n(u) du,$$

$$J_3(n) = \int_{\delta \le |u| \le \pi} |f(u + x_0)| K_n(u) du,$$

$$J_4(n) = |\frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}| \int_{\delta \le |u| \le \pi} K_n(u) du.$$

Далее следует рассуждать аналогично 1.

4.12. Пусть $f, g \in L_2[0, 2\pi]$; a_0, a_n, b_n $(n \in \mathbf{N})$ и α_0, α_n, β_n $(n \in \mathbf{N})$ — соответственно коэффициенты Фурье функций f и g. Доказать, что

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n).$$

Решение. Так как $f + g, f - g \in L_2[0, 2\pi]$, то для этих функций справедливо равенство Парсеваля:

$$\frac{(a_0 + \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n + \alpha_n)^2 + (b_n + \beta_n)^2] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f + g)^2 dx,$$

$$\frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - \alpha_n)^2 + (b_n - \beta_n)^2] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f - g)^2 dx,$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) g(x) dx = \frac{a_0 \alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \alpha_n + b_n \beta_n).$$

4.13. Доказать теорему Кантора-Лебега: если $E \subset [0, 2\pi]$ — множество положительной меры и $\lim_{n\to\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 0$ при $x \in E$, то $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Решение. Пусть $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, тогда можно представить $a_n \cos nx + b_n \sin nx = r_n \cos(nx + \theta_n)$. Если r_n не стремится к нулю, то $\exists\{r_{n_k}\}$ такая, что $r_{n_k} \ge \delta > 0$, $k \in \mathbf{N}$. При $x \in E$ по условию $\lim_{k\to\infty} r_{n_k} \cos(n_k x + \theta_{n_k}) = 0$, следовательно $\lim_{k\to\infty} \cos(x + \theta_{n_k}) = 0$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получим $\lim_{k\to\infty}\int_E \cos^2(n_k x+\theta_{n_k})dx = 0$. С другой стороны,

$$\int_E \cos^2(n_k x+\theta_{n_k})dx = \frac{1}{2}\int_E dx + \frac{1}{2}\int_E \cos 2(n_k x+\theta_{n_k})dx =$$

$$= \frac{1}{2}\mu(E) + \frac{1}{2}\cos(2\theta_{n_k})\int_E \cos(2n_k x)dx - \frac{1}{2}\int_E \sin(2n_k x)dx.$$

Интегралы $\int_E \cos(2n_k x)dx$, $\int_E \sin(2n_k x)dx$ являются коэффициентами Фурье характеристической функции множества E и поэтому стремятся к нулю (см. задачу 4.10). Тем самым получаем, что $\mu(E)=0$, что противоречит условию задачи. Следовательно $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

4.14. Доказать теорему Лузина-Данжуа: если тригонометрический ряд $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ сходится абсолютно на множестве положительной меры, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ сходится.

Решение. Пусть $r_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$. Тогда $a_n\cos nx+b_n\sin nx = r_n\cos(nx+\theta_n)$ для некоторого θ_n. Так как $r_n\cos^2(nx+\theta_n)\le r_n|\cos(nx+\theta_n)|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n\cos^2(nx+\theta_n)$ сходится. Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} r_n\cos^2(nx+\theta_n) = A(x)$, $x\in E$, $\mu(E)>0$. Функция $A(x)$ измерима на E и конечна. Можно выделить подмножество E_1, $\mu(E_1)>0$ на котором $A(x)$ ограничена, и тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n\int_{E_1}\cos^2(nx+\theta_n)dx = \int_{E_1} A(x)dx < \infty.$$

С другой стороны $\int_{E_1}\cos^2(nx+\theta_n)dx$ стремится к $\frac{\mu(E_1}{2}$ (см. задачу 4.13). Тем самым $\exists n_0$: $\forall n\ge n_0$

$$\int_{E_1}\cos^2(nx+\theta_n)dx > \frac{\mu(E_1)}{3},$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\mu(E_1)}{3}r_n < \sum_{n=1}^{\infty} r_n\int_{E_1}\cos^2(nx+\theta_n)dx < \infty,$$

то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ сходится, следовательно сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$.

4.15. Пусть функции $f\in L_1[0,2\pi]$ соответствует ряд Фурье $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. Доказать, что для любого отрезка $[a,b]\subset[0,2\pi]$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx,$$

то есть ряд Фурье функции f можно почленно интегрировать.

Решение. Пусть

$$g(x) = \begin{cases} 1, x\in[a,b], \\ 0, x\notin[a,b]. \end{cases}$$

Функция $g(x)$ является суммой своего ряда Фурье всюду кроме, быть может точек 0, 2π, a, b,

$$g(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

где $\alpha_0 = \frac{b-a}{\pi}$, $\alpha_k = \frac{\sin(kb)-\sin(ka)}{k\pi}$, $\beta_k = \frac{\cos(ka)-\cos(kb)}{k\pi}$. Положим

$$S_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) = \frac{b-a}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin k(b-x)}{k} - \frac{\sin k(a-x)}{k}\right].$$

В задаче 4.3 было показано, что частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ равномерно ограничены, поэтому частичные суммы $S_n(x)$ также равномерно ограничены. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)S_n(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{\alpha_0}{2}\int_0^{2\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx + \beta_k \int_0^{2\pi} f(x)\sin kx dx\right],$$

таким образом

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\frac{\sin(kb)-\sin(ka)}{k} + b_k\frac{\cos(ka)-\cos(kb)}{k}\right] =$$

$$= \int_a^b \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n \cos nx + b_n \sin nx)dx.$$

4.16. Пусть последовательность $\{\lambda_n\}$ монотонно стремится к нулю, $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, $f(x) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \cos nx$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \sin nx$.[4] Доказать, что если $f, g \in L_1[0, 2\pi]$, то ряды $\frac{\lambda_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \cos nx$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n \sin nx$ являются рядами Фурье соответственно функций f и g.

Решение. Так как функция $g(x)$ нечетная, то $a_n(g) = \int_0^{2\pi} g(x)\cos nx dx = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Для любого натурального n ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \sin kx \sin nx$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$ к функции $g(x)\sin nx$ по признаку Дирихле-Абеля. Поэтому

$$b_n(g) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\lambda_k \sin nx \sin kx dx = \lambda_n.$$

Рассмотрим функцию $f(x)$. Так как $f(x)$ — четная функция, то $b_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = 0$, $n \in \mathbf{N}$. По признаку Дирихле-Абеля ряд $\frac{\lambda_0}{2}(1-\cos nx) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k \cos kx(1-\cos nx)$ сходится равномерно к функции $f(x)(1-\cos nx)$ на $\mathbf{R}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Интегрируя почленно по отрезку $[0, \pi]$, получаем

$$(*) \qquad \lambda_0 - \lambda_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Так как $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = 0$, $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx = 0$, то переходя в $(*)$ к пределу при $n \to \infty$, имеем $\lambda_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$, значит $\lambda_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$.

---

[4] Тем самым функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $\mathbf{R} \setminus \{2k\pi\}$, $k \in \mathbf{Z}$.

§2. Преобразование Фурье.

4.17. Пусть последовательность $\{f_n\}$, $f_n \in L_1(\mathbf{R})$, $n \in \mathbf{N}$ сходится в пространстве $L_1(\mathbf{R})$ к функции f (то есть $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|dx = 0$). Доказать, что последовательность $F(f_n)$ сходится к $F(f)$ равномерно на R.

Решение. Утверждение следует из оценки

$$|F(f_n)(\xi) - F(f_m)(\xi)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f_m(x)|dx.$$

4.18. Верно ли, что если $f \in L_1(\mathbf{R})$, то $F(f) \in L_1(\mathbf{R})$?

Решение. Неверно, например для функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, |x| \leq a, \\ 0, |x| > a, \end{cases}$$

имеем $F(f)(\xi) = \frac{2\sin a\xi}{\xi} \notin L_1(\mathbf{R})$.

4.19. Пусть $f \in L_1(\mathbf{R})$. Доказать, что преобразование Фурье $F(f)$ есть функция равномерно непрерывная на R.

Решение. Так как $f \in L_1(\mathbf{R})$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0$ такое, что $\int_A^\infty |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{8}$, $\int_{-\infty}^{-A} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{8}$. Рассмотрим разность $F(f)(\xi_1) - F(f)(\xi_2)$. Имеем

$$|F(f)(\xi_1) - F(f)(\xi_2)| = |\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(e^{ix\xi_1} - e^{ix\xi_2})dx| \leq |\int_{-A}^{A} f(x)(e^{ix\xi_1} - e^{ix\xi_2})dx| +$$

$$+2\int_{|x|\geq A} |f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \int_{-A}^{A} |f(x) 2\sin\frac{x(\xi_1 - \xi_2)}{2}|dx.$$

При $\delta = \min(\frac{\varepsilon}{2A\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx}, \frac{\varepsilon}{2A})$ и $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$ получим $|F(f)(\xi_1) - F(f)(\xi_2)| < \varepsilon$. Следовательно, преобразование Фурье $F(f)$ — равномерно непрерывная функция.

4.20. Пусть функция f вместе со всеми своими производными любого порядка принадлежит классу $L_1(\mathbf{R})$. Можно ли утверждать, что преобразование Фурье $F(f)$ дифференцируемо на всей числовой прямой?

Решение. Нельзя. Рассмотрим, например, функцию $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a \neq 0$. Функция f удовлетворяет условию задачи, но ее преобразование Фурье $F(f)(\xi) = \frac{1}{|a|}\pi e^{-|a\xi|}$ не дифференцируемо в точке $\xi = 0$.

4.21. Пусть функция $f \in L_1(\mathbf{R})$ убывает на бесконечности быстрее любой степени. Можно ли утверждать, что ее преобразование Фурье убывает на бесконечности быстрее любой степени?

Решение. Нельзя. Рассмотрим, например, функцию

$$f(x) = \{ 1, |x| \leq a, 0, |x| > a,$$

где $a > 0$. Тогда $F(f) = \frac{2\sin(a\xi)}{\xi}$.

4.22. Доказать, что если $f \in L_1(\mathbf{R})$, то $F(f)$ есть функция, ограниченная на всей прямой $\mathbf{R}$, причем $F(f)(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$.

Решение. Так как $F(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}dx$, то $|F(f)(\xi)| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$.

Покажем что $\lim_{\xi\to\infty} F(f)(\xi) = 0$.

I. Докажем вспомогательное утверждение: если $f \in L_1[a,b]$, то

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_a^b f(t)e^{i\xi t}dt = 0.$$

Поскольку множество ступенчатых функций всюду плотно в $L_1[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая функция $h(x) = \sum_{j=1}^n c_j\chi_j(x)$, где χ_j – характеристические функции интервалов $(\alpha_j, \beta_j) \subset [a,b]$, $c_j \in \mathbf{R}$, $1 \le j \le n$, такая, что

$$\int_a^b |f(x) - h(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для любого $\xi \in \mathbf{R}$ имеем

$$|\int_a^b f(t)e^{i\xi t}dt| \le |\int_a^b (f(t) - h(t))e^{i\xi t}dt| + |\int_a^b h(t)e^{i\xi t}dt|,$$

$$|\int_a^b (f(t) - h(t))e^{i\xi t}dt| \le \int_a^b |f(t) - h(t)|dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как

$$|\int_a^b h(t)e^{i\xi t}dt| \le \sum_{j=1}^n |c_j| \cdot |\int_{\alpha_j}^{\beta_j} e^{i\xi t}dt| \le \frac{2}{|\xi|}\sum_{j=1}^n |c_j| \to 0$$

при $\xi \to \infty$, то $|\int_a^b f(t)e^{i\xi t}dt| < \varepsilon$ для достаточно больших $|\xi|$, что и требовалось доказать.

II. Так как $f \in L_1(\mathbf{R})$, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists A > 0$: $\int_{|x|\ge A} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Имеем $|F(f)(\xi)| \le |\int_{|x|\ge A} f(x)e^{ix\xi}dx| + |\int_{-A}^{A} f(x)e^{ix\xi}dx| < \frac{\varepsilon}{2} + |\int_{-A}^{A} f(x)e^{ix\xi}dx|$. Согласно сказанному выше, $\lim_{\xi\to\infty} \int_{-A}^{A} f(x)e^{ix\xi}dx = 0$, поэтому $|F(f)(\xi)| < \varepsilon$ для достаточно больших $|\xi|$.

4.23. Доказать, что если $f(x) \in L_1(\mathbf{R})$, $xf(x) \in L_1(\mathbf{R})$, $\ldots$, $x^p f(x) \in L_1(\mathbf{R})$, то преобразование Фурье $F(f)$ имеет производные до p-го порядка включительно и при этом справедливо равенство

$$(F(f))^{(k)}(\xi) = F((ix)^k f(x))(\xi), k = 0, 1, \ldots, p.$$

Решение. Поскольку преобразование Фурье $F(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}dx$ задается интегралом, зависящим от параметра и $\int_{-\infty}^{\infty} (f(x)e^{ix\xi})'dx = \int_{-\infty}^{\infty} ixf(x)e^{ix\xi}dx$, причем последний интеграл сходится равномерно по ξ на всей числовой прямой по признаку Вейерштрасса, то $F(f)'(\xi) = (ixF(f))(\xi)$. Рассуждая по индукции, получаем, что равенство $(F(f))^{(k)}(\xi) = F((ix)^k f(x))(\xi)$ справедливо при $k = 0, 1, \ldots, p$.

4.24. Показать, что если функции f и f' непрерывны и интегрируемы по Лебегу на всей числовой прямой, то $F(f')(\xi) = (-i\xi)F(f)(\xi)$.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$, $x \in \mathbf{R}$. Так как $f, f' \in L_1(\mathbf{R})$, то $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$F(f')(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{ix\xi}dx = f(x)e^{ix\xi}|_{-\infty}^{\infty} - i\xi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix\xi}dx = -i\xi F(f)(\xi).$$

4.25. Пусть f — бесконечно дифференцируемая на всей прямой функция, убывающая на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени.[5] Доказать, что преобразование Фурье $F(f)$ имеет производные любого порядка и на бесконечности убывает быстрее любой степени.

Решение. В силу задачи 4.23., функция $F(f)$ бесконечно дифференцируема и $(F(f))^{(k)}(\xi) = F((ix)^k f)(\xi)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Применяя теперь задачу 4.24., получаем, что $F[(f)^{(k)}](\xi) = (-i\xi)^k F(f)(\xi)$, значит $|F(f)(\xi)| \le \frac{|F(f^{(k)})(\xi)|}{|\xi|^k}$. Так как $F(f^{(k)})$ — ограниченная функция, то преобразование Фурье $F(f)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени.

4.26. Пусть f — бесконечно дифференцируемая на всей прямой функция, убывающая на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени. Известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x)dx = 0$, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Следует ли отсюда, что $f(x) \equiv 0$?

Решение. Покажем, что существует функция $f(x)$ не равная тождественно нулю и удовлетворяющая условию задачи. Рассмотрим функцию

$$F(\xi) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\xi(1-\xi)}}, 0 < \xi < 1, \\ 0, \xi \notin (0, 1). \end{cases}$$

Функция $F(\xi)$ имеет производные всех порядков на всей прямой $\mathbf{R}$ и убывает на бесконечности быстрее любой степени. Кроме того, $F^{(p)}(0) = 0$, $p = 0, 1, \ldots$. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{-ix\xi}d\xi$. Функция $f(x)$ имеет производные всех порядков на прямой $\mathbf{R}$ и на бесконечности убывает быстрее любой степени, причем функция $F(\xi)$ является преобразованием Фурье функции $f(x)$. Покажем, что для функции $f(x)$ выполнены условия задачи. Действительно, $(F(\xi))^{(p)} = \int_{-\infty}^{\infty}(ix)^p f(x)e^{ix\xi}dx$, $F^{(p)}(0) = i^p\int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x)dx = 0$, $p = 0, 1, \ldots$, но функция f не равна тождественно нулю.

4.27. Пусть $f \in L(\mathbf{R})$. Доказать, что если $\int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-i\lambda x}dx = 0$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$, то $f = 0$ почти всюду на $\mathbf{R}$.

Решение. Из условия задачи следует, что для всех действительных t и λ справедливо равенство

$$\int_{\mathbf{R}} f(x+t)e^{-i\lambda x}dx = 0.$$

Пусть $\xi, \lambda \in \mathbf{R}$, $\xi \ge 0$. Введем функцию $\phi(x) = \int_0^{\xi} f(x+t)dt$. Так как функция $g(x,t) = f(x+t)e^{-i\lambda x}$ измерима на множестве $E = \{x \in \mathbf{R}, 0 \le t \le \xi\}$ и

$$\int_0^{\xi} dt\int_{-\infty}^{\infty} |g(x,t)|dx = \xi\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty,$$

[5] Отсюда следует, что функция f и все ее производные принадлежат классу $L_1(\mathbf{R})$.

то $g(x,t)$ интегрируема на множестве E и

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\xi} g(x,t)dt = \int_0^{\xi} dt \int_{-\infty}^{\infty} g(x,t)dx,$$

то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-i\lambda x}dx = 0, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Таким образом $\phi(x)$ интегрируема на $\mathbf{R}$ и ее преобразование Фурье тождественно равно нулю.

Поскольку функция ϕ почти всюду обладает конечной производной, то ϕ почти всюду удовлетворяет условию Дини и, по теореме 5, ϕ равна нулю п.в.. Но ϕ непрерывна, поэтому $\phi(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

Мы показали, что $\int_0^{\xi} f(x)dx = 0$ при $\xi > 0$. Аналогично показывается, что $\int_{\xi}^0 f(x)dx = 0$ при $\xi < 0$. Следовательно $f(x) = 0$ п.в..

4.28. Пусть $f \in L_1[a,b]$ и для любого натурального n

$$\int_{[a,b]} x^n f(x)dx = 0.$$

Доказать, что f равна нулю почти всюду.

Решение. Из условия задачи следует, что для любого многочлена $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ справедливо равенство $\int_{[a,b]} P(x)f(x)dx = 0$. Так как для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\lambda x)^n}{n!}$ сходится к $e^{-i\lambda x}$ равномерно на $[a,b]$, то $\int_{[a,b]} e^{-i\lambda x} f(x)dx = 0$. Продолжим функцию $f(x)$ с отрезка $[a,b]$ на всю прямую:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), x \in [a.b], \\ 0, x \in \mathbf{R} \setminus [a,b]. \end{cases}$$

Применяя к функции F задачу 4.27., получаем, что F равна нулю почти всюду, следовательно f равна нулю почти всюду на отрезке $[a,b]$.

4.29. Пусть $f \in L_2(\mathbf{R})$ и функции $g_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{ix\xi}dx$ равномерно стремятся к нулю при $A \to \infty$. Доказать, что функция $f(x)$ почти всюду равна нулю.

Решение. В силу равномерной сходимости $g_A(\xi)$ к нулю на всей числовой прямой получаем, что $\lim_{A\to\infty} \int_a^b |g_A(\xi)|^2 d\xi = 0$ для любого отрезка $[a,b]$. Если g — преобразование Фурье функции f, то $\lim_{A\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_A(\xi) - g(\xi)|^2 d\xi = 0$ по теореме Планшереля, значит $\lim_{A\to\infty} \int_a^b |g_A(\xi) - g(\xi)|^2 d\xi = 0$. Поэтому $g = 0$ п.в. на любом отрезке $[a,b]$, в частности $\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\xi)d\xi = 0$. Вновь применяя теорему Планшереля получаем, что $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = 0$, значит $f = 0$ п.в. на $\mathbf{R}$.

4.30. Пусть $f \in L_2(\mathbf{R})$ и функции $g_A(\xi) = \int_{-A}^{A} f(x)e^{ix\xi}dx$ сходятся к нулю к нулю при $A \to \infty$ в каждой точке $x \in \mathbf{R}$. Доказать, что функция $f(x)$ почти всюду равна нулю.

Решение. Пусть $B > 0$. Из теоремы Планшереля следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-B}^{B} |g_n(\xi) - g(\xi)|^2 dx = 0.$$

Тем самым последовательность $\{g_n(\xi)\}$ сходится к $g(\xi)$ по мере на отрезке $[-B, B]$. Поэтому можно выделить подпоследовательность $\{g_{n_k}\}$ сходящуюся к g почти всюду на $[-B, B]$. Но по условию последовательность $\{g_n\}$ сходится к нулю, следовательно $g = 0$ п.в. на $\mathbf{R}$.

4.31. Доказать, что преобразование Фурье свертки двух функций $f_1, f_2 \in L_1(\mathbf{R})$ есть произведение преобразований Фурье этих функций.[6]

Решение. Покажем сперва, что функция $f(x)$ определена для почти всех x и интегрируема. На самом деле, двойной интеграл $\iint_{\mathbf{R}^2} f_1(t) f_2(x-t)dtdx$ существует, так как сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(t)f_2(x)|dtdx$. По теореме Фубини функция $f(x)$ определена при почти всех x и существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt$.

Вычислим преобразование Фурье свертки функций f_1 и f_2. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt]e^{i\lambda x}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t)e^{i\lambda x}dx]dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)e^{i\lambda t}e^{i\lambda y}dy]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{i\lambda t}dt \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)e^{i\lambda y}dy = F(f_1)F(f_2)$$

(мы сделали замену $y = x - t$).

4.32. Пусть функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где P и Q — многочлены соответственно степеней n и m не имеющие общих корней, притом $n < m - 1$. Доказать, что если многочлен $Q(x)$ не имеет нулей на вещественной прямой, то:

а) при $\xi > 0$ преобразование Фурье $F(f)(\xi) = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} res_{z=z_j} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\xi z}$, где $z_1, \ldots, z_k$ — нули функции $Q(z)$, лежащие в верхней полуплоскости

б) при $\xi < 0$ преобразование Фурье $F(f)(\xi) = -2\pi i \sum_{j=1}^{k} res_{z=z_j} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\xi z}$, где $z_1, \ldots, z_k$ — нули функции $Q(z)$, лежащие в нижней полуплоскости.

Решение. Так как по условию $n < m - 1$, то $f \in L_1(\mathbf{R})$. Функция $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\xi z}$ аналитична на комплексной плоскости за исключением конечного числа точек — нулей многочлена $Q(z)$, эти точки являются полюсами функции $\frac{P(z)}{Q(z)} e^{i\xi z}$. Далее следует применить теорему о вычетах и лемму Жордана.

4.33. Доказать, что если $f_1, f_2 \in L_1(\mathbf{R})$, то справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(f_1)(\xi)f_2(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} F(f_2)(\xi)f_1(\xi)d\xi.$$

Решение. Так как $f_1, f_2 \in L_1(\mathbf{R})$, то существует двойной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)f_2(\xi)|dxd\xi,$$

[6] Напомним, что функция $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)f_2(x-t)dt$ называется сверткой функций f_1 и f_2.

поэтому по теореме Фубини существуют интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(f_1)(\xi))f_2(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda)e^{i\lambda\xi}d\lambda f_2(\xi)d\xi,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(f_2)(\xi))f_1(\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\lambda)e^{i\lambda\xi}d\lambda f_1(\xi)d\xi$$

и они равны между собой.

4.34. Всякая ли бесконечно дифференцируемая функция $F(x)$, стремящаяся к нулю при $x \to \infty$, является преобразованием Фурье некоторой функции $f \in L_1(\mathbf{R})$?

Решение. Приведем пример функции, удовлетворяющей условию задачи, но не являющейся преобразованием Фурье никакой функции $f \in L_1(\mathbf{R})$.

В задаче 4.4. мы показали, что функция $g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу на отрезке $[-\pi, \pi]$. Представим функцию g в виде ряда $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. Пусть теперь $h(x)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая функция, равная нулю вне отрезка $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и $h(0) = 2\pi$.

Покажем, что функция $F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h(x-n)$ бесконечно дифференцируема, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$, но $F(x)$ не является преобразованием Фурье никакой функции $f(x) \in L_1(\mathbf{R})$. Ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h(x-n)$ сходится в любой точке $x \in \mathbf{R}$. На каждом конечном интервале данный ряд и ряды $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h^{(k)}(x-n)$ сходятся равномерно, поэтому $F^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n h^{(k)}(x-n)$, $k \in \mathbf{N}$. Пусть существует функция $f \in L_1(\mathbf{R})$, для которой F есть преобразование Фурье, то есть $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}dt$. Положим $G(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(t+2\pi m)$. В силу задачи 3.20., функция $G(t)$ определена для почти всех t. Также $G(t+2\pi) = G(t)$ и

$$\int_{-\pi}^{\pi} |G(t)|dt \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t+2\pi m)|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty.$$

С другой стороны

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)e^{int}dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+2\pi m)e^{int}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+2\pi m)e^{in(t+2\pi m)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{int}dt = \frac{1}{2\pi}F(n) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k h(n-k) = \frac{c_n}{2\pi}h(0) = c_n.$$

Тем самым c_k являются коэффициентами Фурье интегрируемой по Лебегу функции $G(t)$, что невозможно.

ГЛАВА V. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть M — непустое множество. Функция $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ называется *метрикой* на M, если для любых $x, y \in M$

1) $\rho(x,y) \geq 0$, причем $\rho(x,y) = 0 \iff x = y$,
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (свойство симметрии),
3) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z)$ для любого $z \in M$ (неравенство треугольника).

Множество M, снабженное метрикой ρ, называется *метрическим пространством.* Это пространство обозначается (M, ρ). В случаях, когда ясно, о какой метрике идет речь, пространство (M, ρ) обозначается просто M. Если $E \subset M$, $E \neq \emptyset$, то пара (E, ρ) также является метрическим пространством. *Расстоянием от точки* $x_0 \in M$ *до множества* $A \subset M$ называется число $\rho(x_0, A) = \inf_{x \in A} \rho(x, x_0)$. *Расстоянием между двумя подмножествами* $A, B \subset M$ называется число $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$. *Диаметром множества* A называется число $\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \rho(x,y)$.

Примеры метрических пространств.

1. Пусть M — произвольное множество. Метрика

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, x \neq y \\ 0, x = y \end{cases}$$

называется *дискретной.* При этом (M, ρ) называется пространством изолированных точек.

2. $\mathbb{R}^n$ — пространство вещественных векторов $(x_1, \ldots, x_n)$, метрика

$$\rho(x,y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|.$$

3. Пространство $B[a,b]$ функций, ограниченных на отрезке $[a,b]$, и его подпространство $C[a,b]$ непрерывных функций, с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

4. Пространство $C^n[a,b]$ функций, имеющих n непрерывных производных на отрезке $[a,b]$, с метрикой

$$\rho(f,g) = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in [a,b]} |f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)|.$$

5. Пространство $\mathbf{R}^n$ с метрикой

$$\rho_p(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

6. Пространство $L_p[a,b]$ $(p \geq 1)$ классов эквивалентности измеримых функций на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющих условию $\int_{[a,b]} |f(x)|^p dx < \infty$, с метрикой

$$\rho_p(f,g) = (\int_{[a,b]} |f(x) - g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

7. Пространство $L_\infty[a,b]$ классов эквивалентности существенно ограниченных функций ($f \in L_\infty[a,b] \iff ||f||_\infty < \infty$, где $||f||_\infty = essup_{x\in[a,b]}|f(x)| = \inf\{M : |f(x)| < M$ почти всюду на $[a,b]\} < \infty$) с метрикой

$$\rho_\infty(f,g) = ||f-g||_\infty.$$

8. Пространство l_p $(p \geq 1)$ числовых последовательностей $(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p < \infty$, с метрикой

$$\rho_p(x,y) = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}, p \geq 1.$$

9. Пространство ограниченных числовых последовательностей $(x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ с метрикой

$$\rho(x,y) = \sup_k |x_k - y_k|$$

обозначается символом l_∞ (или m). Подпространство всех сходящихся числовых последовательностей с той же метрикой обозначается символом c, а всех последовательностей, сходящихся к нулю — c_0. Подпространство всех финитных последовательностей с той же метрикой обозначается символом f. (Последовательность называется финитной, если только конечное число ее членов отлично от нуля.)

Открытые и замкнутые множества.

Пусть $x_0 \in M$ —точка метрического пространства (M,ρ) и $r > 0$. *Открытым шаром* радиуса r с центром в точке x_0 называется множество

$$B_{x_0,r} = \{x \in M | \rho(x_0,x) < r\}.$$

Замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x_0 называется множество

$$K_{x_0,r} = \{x \in M | \rho(x_0,x) \leq r\}.$$

Точка $e \in E \subset M$ называется *внутренней точкой* множества E, если $B_{e,r} \subset E$ для некоторого $r > 0$. Совокупность всех внутренних точек множества E обозначается $intE$. Множество E называется открытым, если $E = intE$. Точка $e' \subset M$ называется *предельной точкой* множества E, если $(B_{e',r} \setminus \{e'\}) \cap E \neq \emptyset$

для любого $r > 0$. Совокупность всех предельных точек множества E называется *производным множеством* и обозначается E'. Точки множества $E \setminus E'$ называются *изолированными точками* множества E. *Замыканием* множества E называется множество $\overline{E} = E \cup E'$. Множество E называется *замкнутым*, если $\overline{E} = E$. Отметим, что само метрическое пространство M и пустое множество являются открытыми и замкнутыми одновременно.

Множество E называется *всюду плотным* в M, если $\overline{E} = M$. Множество E называется *нигде не плотным* в M, если $\overline{E}$ не содержит никаких непустых открытых подмножеств M.

Отображение $f : (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$ называется *непрерывным* в точке $x_0 \in M_1$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ для любого $x \in M_1$, удовлетворяющего условию $\rho_1(x, x_0) < \delta$. Отображение, непрерывное в каждой точке метрического пространства, называется непрерывным на этом метрическом пространстве.

Критерий непрерывности. *Отображение $f : (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества открыт.*

Множество E называется множеством типа G_δ, если E является пересечением счетного числа открытых множеств. Множество E называется множеством типа F_σ, если E является объединением счетного числа замкнутых множеств. Подмножество метрического пространства называется *множеством первой категории*, если оно представимо в виде не более чем счетного числа нигде не плотных множеств. Подмножества, не являющиеся множествами первой категории, называются *множествами второй категории*.

Полные метрические пространства.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства (M, ρ) называется *сходящейся* к элементу $x_0 \in M$, если $\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$. При этом также пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Последовательность $\{x_n\}$ является *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $n, m \geq N(\varepsilon)$. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу этого пространства.

Отметим, что подпространство (E, ρ) полного метрического пространства (M, ρ) является полным метрическим пространством тогда и только тогда, когда E замкнуто в (M, ρ).

Критерий полноты. *Метрическое пространство является полным тогда и только тогда, когда в нем любая последовательность непустых вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.*

При этом последовательность непустых вложенных замкнутых шаров, радиусы которых не стремятся к нулю, может иметь пустое пересечение (см. задачу 5.5).

Теорема Бэра. *Всякое непустое полное метрическое пространство есть множество второй категории.*

Примеры полных метрических пространств.. *Метрические пространства, приведенные в примерах 1-8 выше, являются полными.*[1]

Пусть (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) — метрические пространства. Биективное отображение $f : (M_1, \rho_1) \to (M_2, \rho_2)$ называется *изометрией*, если $\rho_2(f(x), f(y)) = \rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in M_1$. При этом пространства (M_1, ρ_1) и (M_2, ρ_2) называются *изометричными*.

Метрическое пространство (M_2, ρ_2) называется *пополнением* метрического пространства (M_1, ρ_1), если (M_1, ρ_1) изометрично (M^*, ρ_2) для некоторого всюду плотного подмножества $M^* \subset M_2$,

Теорема. *Всякое метрическое пространство обладает пополнением. Любые два пополнения данного метрического пространства изометричны.*

Отображение f метрического пространства (M, ρ) в себя называется *сжимающим*, если существует $\alpha \in [0, 1)$, такое что $\rho(f(x), f(y)) \le \alpha\rho(x, y)$ для любых $(x, y) \in M$. Точка $x \in M$ называется *неподвижной точкой отображения* f, если $f(x) = x$.

Принцип сжимающих отображений (Банах). *Пусть отображение f полного метрического пространства (M, ρ) в себя является сжимающим. Тогда существует и единственна неподвижная точка отображения f.*

Задачи

5.1. Пусть A — подмножество метрического пространства (M, ρ). Доказать, что функция $\rho(x, A)$ непрерывна на (M, ρ). (В частности, при $A = y \in M$, функция $f(x) = \rho(x, y)$ непрерывна на (M, ρ).)

Решение. Для любых $x_0, x \in M$ и $y \in A$ выполнено неравенство треугольника $\rho(x, y) \le \rho(x_0, y) + \rho(x, x_0)$. Отсюда $\rho(x, A) \le \rho(x_0, A) + \rho(x, x_0)$. Меняя x и x_0 местами, получаем $\rho(x_0, A) \le \rho(x, A) + \rho(x, x_0)$. Таким образом $|\rho(x_0, A) - \rho(x, A)| \le \rho(x, x_0) < \varepsilon$ при $\rho(x, x_0) < \varepsilon$.

5.2. Показать, что функция $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$ задает метрику в R^n ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$).

Решение. Первые две аксиомы метрики проверяются тривиально. Обозначим $f_i(x, y) = \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$. Тогда $f_i(x, y) \le f_i(x, z) + f_i(y, z)$ для любых $x, y, z \in \mathrm{R}^n$ и $1 \le i \le n$, поэтому выполнена аксиома 3.

5.3. Рассмотрим множество s всех числовых последовательностей $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$. Показать, что функция $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i - y_i|}$ задает метрику в s и что пространство (s, ρ) полное.

Решение. Пусть f_i, $i \in \mathbf{N}$ — функции, определенные в задаче 5.2. Так как $0 \le f_i(x, y) \le 1$ при $i \in \mathbf{N}$ и $x, y \in s$, то $0 \le \rho(x, y) \le \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$. Поэтому функция $\rho(x, y)$ определена при всех $x, y \in s$. Далее аксиомы метрики проверяются как в задаче 2. Проверим полноту пространства s. Пусть последовательность $\{x^m\}$, $x^m = (x_1^m, \dots, x_k^m, \dots)$ фундаментальна, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $\rho(x^n, x^m) < \varepsilon$ при $m, n \ge N$. Тогда для любого индекса i справедливо неравенство $\frac{1}{2^i} \frac{|x_i^m - x_i^n|}{1+|x_i^m - x_i^n|} < \varepsilon$ из которого следует

[1] Полнота пространств, определенных в примере 9, исследуется в задаче 5.9.

фундаментальность числовой последовательности $\{x_i^n\}$. Поэтому существуют пределы $x_i = \lim_{n\to\infty} x_i^n$. Выберем теперь для любого $\varepsilon > 0$ индекс k такой, что $\sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, полагая $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$, получаем

$$\rho(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^n - x_i|}{1 + |x_i^n - x_i|} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^n - x_i|}{1 + |x_i^n - x_i|}.$$

Так как число слагаемых в последней сумме фиксировано, то существует номер N, такой что $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i^n - x_i|}{1+|x_i^n - x_i|} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n \geq N$, значит $\rho(x, x_n) < \varepsilon$.[2]

5.4. Показать, что функция $\rho_p(x,y)$, введенная в примере 5, не является метрикой в $\mathbf{R}^n$ при $0 < p < 1$ и $n \geq 2$, однако $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ является метрикой в R.

Решение. Пусть $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ $(n \geq 1)$, $x = (1, 0, \dots, 0)$, $y = (0, 1, \dots, 0)$, $z = (0, 0, \dots, 0)$. Тогда $\rho(x,y) = 2^{\frac{1}{p}}$, $\rho(x,z) = \rho(y,z) = 1$ поэтому при $0 < p < 1$ не выполняется неравенство треугольника.

Функция $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ очевидно удовлетворяет первым двум аксиомам метрики в R. Так как $\rho^2(x,y) = |x-y| \leq |x-z| + |z-y| \leq |x-z| + |y-z| + 2\sqrt{|x-z||y-z|} = (\rho(x,z) + \rho(y,z))^2$, то выполнена и аксиома 3.

5.5. Показать, что функция

$$\rho(m,n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, m \neq n, \\ 0, m = n \end{cases}$$

задает метрику на множестве натуральных чисел. Проверить, что данное метрическое пространство полное, и что в нем последовательность замкнутых вложенных шаров $K_{n,1+\frac{1}{2n}}$ имеет пустое пересечение.

Решение. Первые две аксиомы метрики проверяются тривиально. Аксиома треугольника $\rho(m,n) \leq \rho(m,k) + \rho(n,k)$ заведомо верна, если среди чисел m, n, k есть одинаковые. Если же числа m, n, k различны, то $\rho(m,n) \leq 2$, $\rho(m,k) + \rho(n,k) > 2$, поэтому третья аксиома также верна.

Пусть $\{m_n\}$ — фундаментальная последовательность. Тогда существует номер $N : \rho(m_n, m_N) < 1$ при $n \geq N$, поэтому $m_n = m_N$ и последовательность $\{m_n\}$ сходится к m_N. Осталось заметить, что $K_{n,1+\frac{1}{2n}} = \{n, n+1, n+2, \dots\}$, поэтому $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{n,1+\frac{1}{2n}} = \emptyset$.

5.6. Показать, что функция

$$\rho(f,g) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)|}{2^i(1 + \sup_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)|)}$$

задает метрику на множестве $C^{\infty}[a,b]$ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$. Проверить, что данное метрическое пространство полное.

[2] Отметим, что сходимость в данной метрике есть сходимость по координатам.

Решение. Аналогично задаче 5.3, получаем, что функция $\rho(f,g)$ является метрикой на $C^\infty[a,b]$, и для любой фундаментальной последовательности $\{f_n(x)\}$ в $C^\infty[a,b]$ и для любого $k=0,1,\ldots$, последовательность $\{f_n^{(k)}(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$. Поэтому последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к некоторой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$, причем для любого $k \in \mathbf{N}$ последовательность $\{f_n^{(k)}(x)\}$ сходится равномерно к $f^{(k)}(x)$ на отрезке $[a,b]$. Далее полнота пространства $C^\infty[a,b]$ следует из соображений, сходных с приведенными в задаче 5.3.

5.7. Показать, что на множестве функций, определенных на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющих условию Липшица с показателем α, $0<\alpha\le 1$ (то есть $\omega(\delta,f)=O(\delta^\alpha)$)[3] можно ввести метрику по формуле

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|+\sup_{x_1,x_2\in[a,b],x_1\ne x_2}\frac{|f(x_1)-g(x_1)-f(x_2)+g(x_2)|}{|x_1-x_2|^\alpha}.$$

Полученное пространство иногда называют пространством Гельдера-Зигмунда и обозначают $H^\alpha[a,b]$. Показать, что пространство $H^\alpha[a,b]$ полное.

Решение. Пусть функции f и g удовлетворяют условию Липшица на отрезке $[a,b]$. Тогда существуют постоянные C_1, C_2 такие, что $\omega(\delta,f)\le C_1\delta^\alpha$, $\omega(\delta,g)\le C_2\delta^\alpha$. Пусть $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1\ne x_2$. Возьмем $\delta=2|x_2-x_1|$. Тогда $\frac{|f(x_1)-g(x_1)-f(x_2)+g(x_2)|}{|x_1-x_2|^\alpha}\le 2^\alpha(C_1+C_2)$, значит функция $\rho(f,g)$ определена на пространстве $H^\alpha[a,b]$. Первые две аксиомы метрики для функции $\rho(f,g)$ проверяются тривиально. Функция $\rho_1(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ является метрикой на пространстве $C[a,b]$. Поскольку для любых $f,g,h\in H^\alpha[a,b]$ верно $|f(x_1)-g(x_1)-f(x_2)+g(x_2)|\le|f(x_1)-h(x_1)-f(x_2)+h(x_2)|+|h(x_1)-g(x_1)-h(x_2)+g(x_2)|$, то функция $\rho_2(f,g)=\sup_{x_1,x_2\in[a,b],x_1\ne x_2}\frac{|f(x_1)-g(x_1)-f(x_2)+g(x_2)|}{|x_1-x_2|^\alpha}$ удовлетворяет третьей аксиоме метрики. Отсюда функция $\rho(f,g)=\rho_1(f,g)+\rho_2(f,g)$ тоже удовлетворяет третьей аксиоме метрики.

Проверим полноту пространства H^α. Пусть $\{f_n\}\in H^\alpha[a,b]$ — фундаментальная последовательность, то есть $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall m,n\ge N\ \rho(f_n,f_m)<\varepsilon$. Тогда и $\rho_1(f,g)<\varepsilon$, поэтому последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к непрерывной функции $f(x)$, причем $\rho_1(f_n,f)\le\varepsilon$. Так как $\rho_2(f_n,f_m)<\varepsilon$, то $\frac{|f_n(x_1)-f_m(x_1)-f_n(x_2)+f_m(x_2)|}{|x_1-x_2|^\alpha}<\varepsilon$ для любых $x_1,x_2\in[a.b]$, $x_1\ne x_2$, и, устремляя n к бесконечности, получаем $\frac{|f_n(x_1)-f(x_1)-f_n(x_2)+f(x_2)|}{|x_1-x_2|^\alpha}\le\varepsilon$. Отсюда $\omega(\delta,f)\le\omega(\delta,f_n)+\varepsilon\delta^\alpha$, значит $f\in H^\alpha[a,b]$, $\rho_2(f,f_n)\le\varepsilon$, $\rho(f_n,f)=\rho_1(f_n,f)+\rho_2(f_n,f)\le 2\varepsilon<3\varepsilon$, и, таким образом, последовательность $\{f_n\}$ сходится к f по метрике ρ, что доказывает полноту пространства $H^\alpha[a,b]$.

5.8. Пусть $\rho_p(f,g)=(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $p\ge 1$. Будет ли функция $\rho_p(f,g)$ метрикой:

а) на пространстве кусочно-непрерывных функций на отрезке $[a,b]$,

б) на пространстве кусочно-непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ с конечным числом точек разрыва и таких, что $f(a+0)=f(b-0)$ и $f(x)=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$ при $x\in(a,b)$?

---

[3]Напомним, что модулем непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется функция $\omega(\delta,f)=\sup_{x_1,x_2\in[a,b],|x_1-x_2|<\delta}|f(x_1)-f(x_2)|$.

Решение. а) Нет, так как при $f(x) \equiv 0$, $g(a) = 1$, $g(x) = 0$, $x \in (a, b)$, получаем $\rho_p(f, g) = 0$, что противоречит первой аксиоме метрики.

б) Да, будет. Функция $\rho_p(f, g)$ неотрицательна и удовлетворяет второй и третьей аксиомам метрики (аксиома треугольника следует из интегрального неравенства Минковского). Так как $\rho_p(f, g) = \rho_p(f - g, 0)$, то достаточно показать, что из $\rho_p(f, 0) = 0$ следует $f \equiv 0$. Пусть $y \in (a, b)$ не является точкой разрыва функции f и $f(y) \neq 0$. Тогда существует отрезок $[c, d] \subset (a, b)$, $c < d$, такой что $f(x) \neq 0$ при $x \in [c, d]$ и $f(x)$ непрерывна на $[c, d]$. Поэтому $0 = \rho_p(f, 0) \geq (\int_c^d |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} \geq \min_{[c,d]} |f(x)|(d - c)^{\frac{1}{p}} > 0$, что невозможно. Поэтому функция $f(x)$ равна нулю во всех точках непрерывности. Отсюда вытекает, что все односторонние пределы функции $f(x)$ тоже равны нулю, значит $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

5.9. Являются ли полными пространства l_∞, f, c, c_0 (см. пример 9)?

Решение. Пространство l_∞ является полным. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x^n\}$ элементов из l_∞, $x^n = (x_1^n, \ldots, x_j^n, \ldots)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)$: $\forall n, m \geq N$, $\forall j \in \mathbf{N}$,

$$(*) \qquad |x_j^n - x_j^m| < \varepsilon$$

Для каждого фиксированного $j \in \mathbf{N}$, согласно критерию Коши, числовая последовательность $\{x_j^n\}$ сходится. Пусть $x_j = \lim_{n\to\infty} x_j^n$. Устремляя m к бесконечности в неравенстве $(*)$, получаем, что $\forall j \in \mathbf{N}\ \forall n \geq N\ |x_j^n - x_j| \leq \varepsilon$, значит $x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots) \in l_\infty$ и $x = \lim_{n\to\infty} x^n$ по метрике пространства l_∞.

Пространство f не является полным, так как оно не замкнуто в l_∞. Действительно, последовательность $x_n = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots)$ (все координаты последовательности x_n с номером больше n равны нулю) является фундаментальной, но не сходится к элементу из f.

Покажем, что c замкнуто в l_∞ (а значит и полно). Пусть $\{s_n\} \in c$ — фундаментальная последовательность, $s = \lim_{n\to\infty} s_n \in l_\infty$, $s_n = (x_1^n, \ldots x_k^n, \ldots)$, $s = (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$. Покажем, что $s \in c$. Так как $\{s_n\}$ сходится к s, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall k \in \mathbf{N}\ |x_k^N - x_k| < \frac{\varepsilon}{3}$. Так как $s_N \in c$, то $\exists K : \forall k, m \geq K\ |x_k^N - x_m^N| < \frac{\varepsilon}{3}$. Поэтому при $k, m \geq K$, имеем $|x_k - x_m| \leq |x_k - x_k^N| + |x_k^N - x_m^N| + |x_m^N - x_m| < \varepsilon$, то есть $\{x_k\}$ — сходящаяся последовательность согласно критерию Коши, поэтому $s \in c$.

Аналогично доказывается, что пространство c_0 замкнуто в l_∞.

5.10. Рассмотрим подмножество M пространства $\mathbf{R}^n$, состоящее из векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с рациональными координатами. Пусть $\rho(x, y) = \max_{1\leq j\leq n} |x_j - y_j|$. Показать, что метрическое пространство (M, ρ) не будет полным. Найти его пополнение.

Решение. Заметим, что (M, ρ) является подпространством полного метрического пространства $(\mathbf{R}^n, \rho)$ с той же метрикой и $\overline{M} = \mathbf{R}^n$. Поэтому (M, ρ) не полно и его пополнением является $(\mathbf{R}^n, \rho)$.

5.11. Будет ли полным пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, если метрика задается формулой $\rho_p(f, g) = (\int_a^b |f(x) - g(x)|dx)^{\frac{1}{p}}$, $p > 1$?

Решение. Нет, не будет. Без ограничения общности считаем $[a,b]=[-1,1]$. Тогда последовательность

$$f_n(x)=\begin{cases} nx, |x|\le \frac{1}{n} \\ sign(x), \frac{1}{n}<|x|\le 1 \end{cases}$$

является фундаментальной. Предположим, что эта последовательность сходится к непрерывной функции $f(x)$ относительно метрики ρ_p. Тогда для любого $n\in\mathbf{N}$ при $m\ge n$ имеем $\rho_p(f_m,f)^p\ge\int_{\frac{1}{n}}^{1}|f(x)-1|^p dx+\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}|f(x)+1|^p dx$. Устремляя m к бесконечности и пользуясь непрерывностью функции $f(x)$, получаем, что $f(x)=sign(x)$ при $x\neq 0$, что противоречит непрерывности $f(x)$.

5.12 Привести пример метрического пространства, в котором некоторый замкнутый шар большего радиуса целиком лежит в замкнутом шаре меньшего радиуса, но не совпадает с ним.

Решение. Рассмотрим множество натуральных чисел с метрикой, определенной в задаче 5.5. Тогда $K_{n,1+\frac{1}{2n}}\subset K_{2n,1+\frac{1}{2n+1}}$ при $n\ge 2$.

5.13. Привести пример замкнутых непересекающихся множеств F_1, F_2 на плоскости $\mathbf{R}^2$ со стандартной метрикой ρ_2 (см. пример 5), таких что $\rho_2(F_1,F_2)=0$

Решение. Пусть $F_1=\{(x,0),x\in\mathbf{R}\}$, $F_2=\{(x,y),y=\frac{1}{1+x^2},x\in\mathbf{R}\}$. Тогда множества F_1 и F_2 замкнуты. Но для точек $a_n=(n,0)\in F_1$, $b_n=(n,\frac{1}{1+n^2})\in F_2$ имеем $\rho_2(a_n,b_n)\to 0$ при $n\to\infty$, поэтому $\rho_2(F_1,F_2)=0$.

5.14. Доказать, что открытый круг на плоскости нельзя представить в виде объединения двух открытых непустых непересекающихся множеств, а замкнутый круг — в виде объединения двух замкнутых непустых непересекающихся множеств. (Метрика на плоскости берется стандартной, как и в предыдущем примере.)

Решение. Пусть K — замкнутый круг. Предположим, что $K=F_1\cup F_2$, где F_1 и F_2 — замкнутые непустые непересекающиеся множества. Возьмем $a_1\in F_1$, $a_2\in F_2$. Если середина c отрезка $[a,b]$ принадлежит F_1, полагаем $a_2=c$, $b_2=b_1$. При $c\in F_2$ полагаем $a_2=a_1$, $b_2=c$. Продолжая этот процесс по индукции, получаем последовательности $\{a_n\}\subset F_1$ и $\{b_n\}\subset F_2$, сходящиеся к одной и той же точке $a_0\in K$. Так как множества F_1 и F_2 замкнуты, то $a_0\in F_1\cap F_2$, что противоречит $F_1\cap F_2=\emptyset$.

Пусть B — открытый круг и $B=U_1\cup U_2$, где U_1, U_2 — открытые непустые непересекающиеся множества. Рассуждая как выше, получаем последовательности $\{a_n\}\subset U_1$ и $\{b_n\}\subset U_2$, сходящиеся к одной и той же точке $a_0\in B$. По условию точка a_0 лежит в одном из множеств U_1, U_2, но по построению, в любой окрестности точки a_0 есть точки как из U_1, так и из U_2, что противоречит открытости этих множеств.

5.15. В пространстве $C[a,b]$ с метрикой $\rho(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$ рассмотрим множества:

а) M_1 — множество многочленов, степень которых не превосходит некоторого натурального n,

б) M_2 — множество многочленов, свободный член которых равен нулю,

в) $M_3 = \{f(x) : A < f(x) < B\}$, **числа** A **и** B **фиксированы,**

г) $M_4 = \{f(x) : A \le f(x) \le B\}$, **числа** A **и** B **фиксированы,**

д) $M_5 = \{f(x) : f(x) \le F(x)\}$, **функция** $F \in C[a,b]$ **фиксирована,**

е) $M_6 = \{f(x) : f(x) > F(x)\}$, **функция** $F \in C[a,b]$ **фиксирована.**

Будут ли множества M_1, M_2, M_4, M_5 **замкнутыми, а множества** M_3, M_6 **открытыми ? Найдите** $\overline{M}_2$ **и** M_2'.

Решение. а) Достаточно показать, что любая фундаментальная последовательность $\{P_j(x)\}$ многочленов из M_1 сходится к некоторому многочлену $P(x) \in M_1$. Рассмотрим точки $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Пусть $a_{jk} = P_j(x_k)$, $k = 0, \ldots, n$, $j \in \mathbf{N}$. Тогда для любого $k = 0, \ldots, n$ числовая последовательность $\{a_{jk}\}$ является фундаментальной, а значит существует $a_k = \lim_{j\to\infty} a_{jk}$. Пусть $P(x)$ — многочлен такой, что $P(x_k) = a_k$, $k = 0, \ldots, n$. Покажем, что $P(x)$ — предел последовательности $\{P_j(x)\}$. Действительно,

$$P_j(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk} \prod_{l=0, l\ne k}^{n} \frac{(x - x_l)}{(x_k - x_l)}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \prod_{l=0, l\ne k}^{n} \frac{(x - x_l)}{(x_k - x_l)}.$$

Обозначим $Q_k(x) = \prod_{l=0, l\ne k}^{n} \frac{(x-x_l)}{(x_k - x_l)}$. Тогда

$$\rho(P_j, P) \le \sum_{k=0}^{n} |a_{jk} - a_k| \sup_{x\in[a,b]} |Q_k(x)| \to 0, \quad j \to \infty,$$

что и требовалось доказать.[4]

б) Рассмотрим два случая: 1) $0 \in [a,b]$, 2) $0 \notin [a,b]$.

В первом случае любая функция $f \in \overline{M}_2$ удовлетворяет условию $f(0) = 0$, так как к ней равномерно сходится последовательность многочленов $P_n(x)$, такая, что $P_n(0) = 0$. Покажем, что любая функция $f \in C[a,b]$, такая что $f(0) = 0$ принадлежит $\overline{M}_2$. По теореме Вейерштрасса существует последовательность многочленов $Q_n(x)$, равномерно сходящаяся на $[a,b]$ к $f(x)$, то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \ge N, \forall x \in [a,b]\ |f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon$. В частности $|Q_n(0)| < \varepsilon$. Рассмотрим $\{P_n(x)\} \in M_2$, $P_n(x) = Q_n(x) - Q_n(0)$. Тогда $\forall n \ge N$, $\forall x \in [a,b]$ $|f(x) - P_n(x)| \le |f(x) - Q_n(x)| + |Q_n(0)| < 2\varepsilon$, то есть $f(x) \in \overline{M}_2$. Мы показали, что $\overline{M}_2 = \{f(x) \in C[a,b], f(0) = 0\} \ne M_2$. Осталось заметить, что любой многочлен $P \in M_2$ является предельной точкой множества M_2, так как любая окрестность многочлена $P(x)$ содержит многочлен $\alpha P(x)$, где число α близко к единице. Поэтому $M_2' = \overline{M}_2$.

Во втором случае рассмотрим произвольный отрезок $[-R, R] \supset [a,b]$ и продолжим произвольную функцию $f(x) \in C[a,b]$ до функции $F(x) \in C[-R,R]$: $F(0) = 0$. Как и выше, существует последовательность многочленов $P_n(x) \in M_2$, равномерно сходящаяся к $F(x)$ на отрезке $[-R,R]$. Поэтому эта же последовательность будет сходится к $f(x)$ в пространстве $C[a,b]$. Таким образом, $\overline{M}_2 = C[a,b] \ne M_2$. Рассуждая как выше, получаем $M_2' = \overline{M}_2$.

в) Покажем, что множество M_3 открыто. Пусть $f \in M_3$. Так как $f(x)$ непрерывна, то $\exists \alpha, \beta$: $\forall x \in [a,b]$ $A < \alpha \le f(x) \le \beta < B$. Рассмотрим $c > 0$

[4] Замкнутость множества M_1 также следует из того, что M_1 является конечномерным подпространством в нормированном пространстве (см. задачу 8.1).

такое, что $[\alpha - c, \beta + c] \subset (A, B)$. Тогда шар с центром в точке f радиуса c принадлежит M_3.

г) Покажем, что множество M_4 замкнуто. Пусть $f \in C[a,b] \setminus M_4$. Тогда существует $x_0 \in [a,b] : f(x_0) \notin [A, B]$. Рассмотрим $c > 0$ такое, что $[f(x_0) - c, f(x_0) + c] \cap [A, B] = \emptyset$. Отсюда шар с центром в точке f радиуса c принадлежит $C[a,b] \setminus M_4$. Значит множество $C[a,b] \setminus M_4$ открыто и множество M_4 замкнуто.

д) Рассуждая аналогично г), получаем, что множество M_5 замкнуто.

е) Рассуждая аналогично в), получаем, что множество M_6 открыто.

5.16. Пусть множества M_2, M_3, M_4 те же, что и в задаче 5.15. На пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций введем интегральную метрику $\rho_p(f,g) = (\int_a^b |f(x) - g(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$. Определить, будут ли множества M_2, M_4 замкнутыми, а множество M_3 открытым.

Решение. Заметим, что $\rho_p(f,g) \leq (b-a)^{\frac{1}{p}} \rho(f,g)$, где $\rho(f,g)$ — метрика в $C[a,b]$. Поэтому замыкание множества M_2 относительно метрики $\rho_p(f,g)$ содержит замыкание множества M_2 относительно метрики $\rho(f,g)$. Значит $\overline{M}_2 = C[a,b]$, если $0 \notin [a,b]$ и $\overline{M}_2 \supset \{f \in C[a,b] : f(0) = 0\}$, если $0 \in [a,b]$. Покажем, что $\overline{M}_2 = C[a,b]$ и в случае $0 \in [a,b]$. Пусть $h \in C[a,b]$, $\delta > 0$. Тогда существует непрерывная функция $h_\delta(x)$, такая что $h_\delta(x) = h(x)$ при $x \in [a,b] \setminus (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$ и $h_\delta(0) = 0$, причем $|h_\delta(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |h(x)|$. Поэтому для любого натурального n и достаточно малых δ имеем $\rho_p(h, h_\delta) \leq 2 \max_{x \in [a,b]} |h(x)| \delta^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{n}$. Так как $h_\delta(x) \in \overline{M}_2$, то существует многочлен $P_n(x) \in M_2$, такой что $\rho_p(h_\delta, P_n) < \frac{1}{n}$. Отсюда $\rho_p(h, P_n) < \frac{2}{n}$, значит $h(x)$ является пределом последовательности $\{P_n(x)\}$ относительно метрики $\rho_p(f,g)$.

Покажем, что множество M_3 не является открытым. Достаточно показать, что в любом шаре $B_{f,R}$ с центром в точке $f(x) \in M_3$ найдется функция, не принадлежащая M_3. Рассмотрим функции $g_n(x) = f(x) + h_n(x)$, где

$$h_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{1}{2p}} (\sin \pi n(x-a))^{\frac{1}{p}}, a \leq x \leq a + \frac{1}{n} \\ 0, a + \frac{1}{n} \leq x \leq b. \end{cases}$$

Тогда, для достаточно больших n, $g_n(x) \notin M_3$, но $\rho_p(f, g_n) < R$.

Покажем, что множество M_4 замкнуто. Рассмотрим функцию $f \notin M_4$. Тогда $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) \notin [A, B]$. Без ограничения общности полагаем $f(x_0) > B$. Обозначим $C = f(x_0) - B$. В силу непрерывности функции $f(x)$ найдется отрезок $[\alpha, \beta] \in [a,b]$, $x_0 \in [\alpha, \beta]$, такой что $f(x) > B + \frac{C}{2}$ при $x \in [\alpha, \beta]$. Поэтому при $g(x) \in M_4$, $x \in [\alpha, \beta]$ имеем $|f(x) - g(x)| > \frac{C}{2}$, значит $\rho_p(f,g) > \frac{C(\beta-\alpha)^{\frac{1}{p}}}{2}$, поэтому $f(x)$ имеет окрестность, не содержащую точек из M_4. Отсюда множество M_4 замкнуто, как дополнение к открытому множеству.

5.17. Привести пример метрического пространства, в котором некоторый открытый шар является замкнутым множеством, но не является замкнутым шаром.

Решение. Пусть $M_1 = (0,1)$, $M_2 = (1,2)$, $M = M_1 \cup M_2$. Тогда M будет метрическим пространством, если задать метрику

$$\rho(x,y) = \begin{cases} |x-y|, \text{ если } x, y \in M_1, \text{ или } x, y \in M_2 \\ \frac{1}{2}, \text{ если } x \in M_1, y \in M_2 \text{ или } x \in M_2, y \in M_1. \end{cases}$$

Тогда M_1 является открытым шаром $B_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ и замкнутым множеством (как дополнение к $M_2 = B_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$, но M_1 не является никаким замкнутым шаром.

5.18. Пусть (M,ρ) — непустое полное метрическое пространство и $M = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$, где множества F_n замкнуты. Доказать, что хотя бы одно из множеств F_n имеет внутренние точки.

Решение. Если множество F_n не имеет внутренних точек, то в силу его замкнутости, F_n нигде не плотно. По теореме Бэра пространство M является множеством второй категории, поэтому хотя бы одно из множеств F_n имеет внутренние точки.

5.19. Пусть M — множество функций $y_n(x) = nx^2$, $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что множество M нигде не плотно в $C[0,1]$.

Решение. Так как $\rho(y_n, y_m) \geq 1$, $n \neq m$, то $\overline{M} = M$ и $intM = \emptyset$.

5.20. Доказать, что в пространстве $C[a,b]$ множество M, состоящее из функций $f(x)$ таких, что в каждой точке $x \in [a,b]$ разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ограничено на множестве $h \in (a-x, b-x)$, есть множество первой категории.

Решение. Пусть $S_n = \{f(x) \in C[a,b] : |f(h+\frac{a+b}{2}) - f(\frac{a+b}{2})| \leq n|h|, 0 \leq |h| \leq \frac{b-a}{2}\}$. Заметим, что каждое S_n замкнуто в $C[a,b]$, $M \in \cup_{n=1}^{\infty} S_n$. Обозначим $M_n = M \cap S_n$. Тогда $M = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$, $\overline{M}_n \subset \overline{S}_n = S_n$. Покажем, что множества M_n нигде не плотные. Допустим противное. Тогда $\exists n$, $\exists f(x) \in M_n$, $\exists R > 0$: $B_{f,R} \subset \overline{M}_n \subset S_n$. Но функция $g(x) = f(x) + \varepsilon\sqrt{|x - \frac{a+b}{2}|}$ принадлежит $B_{f,R}$ для достаточно малых ε, однако

$$\frac{|g(h+\frac{a+b}{2}) - g(\frac{a+b}{2})|}{h} = |\frac{(f(h+\frac{a+b}{2}) - f(\frac{a+b}{2}))}{h} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{h}}| \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{h}} - n \to \infty$$

при $h \to 0$. Противоречие. Таким образом, каждое из множеств M_n нигде не плотно и M является множеством первой категории.

5.21. Показать, что множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел является множеством типа F_σ, но не является множеством типа G_δ, а множество иррациональных чисел является множеством типа G_δ, но не является множеством типа F_σ.

Решение. Так как любая точка является замкнутым множеством, то $\mathbf{Q} = \cup_{q\in} \ q$ есть счетное обьединение замкнутых множеств, а $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \cap_{q\in} \ (\mathbf{R} \setminus q)$ есть счетное пересечение открытых множеств.

Допустим от противного, что $\mathbf{Q} = \cap_{n=1}^{\infty} U_n$ есть счетное пересечение открытых множеств U_n (то есть является множеством типа G_δ). Тогда $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \cup_{n=1}^{\infty}(\mathbf{R} \setminus U_n)$ (то есть множество иррациональных чисел является множеством типа F_σ). Но $int(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \emptyset$, поэтому каждое из множеств $\mathbf{R} \setminus U_n$ — замкнутое нигде не плотное. Значит множество иррациональных чисел является множеством первой категории. Но тогда $\mathbf{R} = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) \cup \mathbf{Q}$ тоже является множеством первой категории, что противоречит теореме Бэра и полноте $\mathbf{R}$.

5.22 а) Пусть A_1 и A_2 — множества типа G_δ. Показать, что $A_1 \cup A_2$ является множеством типа G_δ.

б) Пусть B_1 и B_2 — множества типа F_σ. Показать, что $B_1 \cap B_2$ является множеством типа F_σ.

Решение. а) Так как A_1 и A_2 — множества типа G_δ, то $A_1 = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, $A_2 = \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$, где множества U_n и V_m являются открытыми. Поэтому

$$A_1 \cup A_2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} (U_n \cup V_m).$$

Так как множества $U_n \cup V_m$ являются открытыми, то $A_1 \cup A_2$ — множество типа G_δ.

б) Представим множества B_1 и B_2 в виде $B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $B_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q_m$, где множества P_n и Q_m замкнуты. Тогда

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (P_n \cap Q_m).$$

5.23. Привести пример множества, не являющегося ни множеством типа G_δ, ни множеством типа F_σ.

Решение. Пусть M_1 — множество рациональных чисел отрезка $[0,1]$, M_2 — множество иррациональных чисел отрезка $[2,3]$. Тогда множество $M = M_1 \cup M_2$ — искомое. Действительно, если M типа G_δ, то $M_1 = M \cap (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ тоже типа G_δ. Но это невозможно согласно задаче 5.21. Если M является множеством типа F_σ, то, согласно задаче 5.22, $M_2 = M \cap [\frac{3}{2}, 4]$ является множеством типа F_σ. Это невозможно согласно задаче 5.21.

5.24. Рассмотрим пространство M_n многочленов, степень которых не превышает n. Каждому многочлену $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx_n$ поставим в соответствие вектор $f(x) = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{R}^{n+1}$. (Метрика на R^{n+1} стандартная, то есть $\rho_{\ \ n+1}(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n+1} |x_j - y_j|^2}$. Будет ли отображение f изометрическим, если метрика на M_n задана формулой:

а) $\rho(Q,P) = \sqrt{\sum_{j=0}^{n} |a_j - b_j|^2}$, **где** $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$;

б) $\rho(P,Q) = \max_{x\in[a,b]} |P(x) - Q(x)|$?

Решение. Отображение f биективно и в случае а) является, очевидно, изометрическим. Покажем, что в случае б) отображение не является изометрическим. Без ограничения общности положим $[a,b] = [0,1]$. Рассмотрим $P(x) \equiv 0$, $Q(x) = 1 - x$. Тогда $\rho(P,Q) = 1$, $\rho_{\ \ n}(f(P), f(Q)) = \sqrt{2}$.

5.25. Рассмотрим отображение $\phi : C^m[a,b] \to C[a,b]$, $\phi(f)(x) = f^{(m)}(x)$. Является ли это отображение непрерывным?

Решение. Да, является. Пусть ρ_1 — метрика на $C[a,b]$, ρ_2 — метрика на $C^m[a,b]$ (см. примеры 3,4). Тогда $\rho_1(\phi(f), \phi(g)) \leq \rho_2(f,g)$ для любых $f, g \in C[a,b]$, что доказывает непрерывность отображения ϕ в каждой точке $f \in C^m[a,b]$.

5.26. Пусть M_1 — пространство непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с интегральной метрикой ρ_p (см. задачу 23), $M_2 = C[a,b]$. Будет ли тождественное отображение $\phi : M_1 \to M_2$, $\phi(f)(x) = f(x)$ непрерывным?

Решение. Нет, не будет. Рассмотрим, например, отрезок $[0,1]$. Последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi n x), 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

сходится к нулю в пространстве M_1, но не сходится к нулю в пространстве M_2, поэтому отображение ϕ разрывно в нуле. Аналогично, рассматривая последовательность $\{g_n(x)\}$, $g_n(x) = f(x) + f_n(x)$, получаем, что отображение ϕ разрывно в каждой "точке" $f \in M_1$.

5.27. Пусть f — отображение полного метрического пространства (M, ρ) в себя, такое что $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ при $x, y \in M$, $x \neq y$. Имеет ли такое отображение всегда неподвижную точку, а если имеет, то всегда ли она единственна?

Решение. Такое отображение не всегда имеет неподвижную точку. Например, отображение $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x + \frac{\pi}{2} - arctg(x)$ удовлетворяет условию задачи, однако, если $f(x) = x$, то $arctg(x) = \frac{\pi}{2}$, что невозможно. Покажем, что для отображения f, удовлетворяющего условию задачи, неподвижная точка всегда единственна. Действительно, если x, y — две различные неподвижные точки отображения f, то $\rho(x, y) = \rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ — противоречие.

5.28. Пусть f — отображение полного метрического пространства (M, ρ) в себя, такое что отображение f^n является сжимающим для некоторого натурального n. Показать, что отображение f имеет неподвижную точку, притом единственную.

Решение. Пусть x — неподвижная точка отображения f^n. Тогда точка $y = f(x)$ — тоже неподвижная точка отображения f^n, так как $f^n(y) = f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(x) = y$. Так как отображение f^n имеет единственную неподвижную точку, то $y = x$, то есть $f(x) = x$.

Так как любая неподвижная точка отображения f является неподвижной точкой отображения f^n, то x — единственная неподвижная точка отображения f.

5.29. Пусть отображение $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ задается системой линейных уравнений

$$f(x)_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + b_k, 1 \leq k \leq n$$

или $Ax^t + b^t = f(x)^t$, где $A = ||a_{ij}||$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(x) = (f(x)_1, \ldots, f(x)_n)$. Показать, что:

а) Если метрика в $\mathbf{R}^n$ определена равенством $\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$, то условие $\max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы отображение f было сжимающим.

б) Если метрика в $\mathbf{R}^n$ определена равенством $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$, то условие $\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| < 1$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы отображение f было сжимающим.

в) Если метрика в $\mathbf{R}^n$ определена равенством $\rho(x, y) = (\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2)^{\frac{1}{2}}$, то условие $\sum_{j,k=1}^{n} a_{kj}^2 < 1$ является достаточным, но при $n > 1$ не является необходимым для того, чтобы отображение f было сжимающим.

Решение. а) Достаточность. Пусть $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| < 1$. Покажем, что $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$ при $x, y \in \mathbf{R}^n$. В силу линейности f достаточно показать справедливость этого неравенства при $y = 0$. Имеем

$$\rho(f(x), f(0)) = \max_{1\le k\le n} |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| \le \max_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| \max_{1\le j\le n} |x_j| \le \alpha\rho(x, 0).$$

Необходимость. Допустим, что $\sum_{j=1}^{n} |a_{k_0 j}| \ge 1$ для некоторого k_0. Тогда для вектора $x = (sign(a_{k_0 1}), \dots, sign(a_{k_0 n}))$ имеем $\rho(x, 0) = 1$, но $\rho(f(x), f(0)) \ge |\sum_{j=1}^{n} a_{k_0 j} x_j| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k_0 j}| \ge 1$, значит отображение f не является сжимающим.

б) Достаточность. Пусть $\max_{1\le j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}| = \alpha < 1$. Аналогично а) достаточно показать, что $\rho(f(x), f(0)) \le \alpha\rho(x, 0)$. Имеем

$$\rho(f(x), f(0)) = \sum_{k=1}^{n} |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|(\sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|) \le \alpha\rho(x, 0).$$

Необходимость. Допустим, что $\sum_{k=1}^{n} |a_{kj_0}| \ge 1$ для некоторого j_0. Тогда для вектора $x = e_{j_0}$ (то есть $x_{j_0} = 1$, $x_j = 0$ при $j \ne j_0$), получаем $\rho(x, 0) = 1$, $\rho(f(x), f(0)) = \sum_{k=1}^{n} |a_{kj_0}| \ge 1$, значит отображение f не является сжимающим.

в) Достаточность. Пусть $\alpha = (\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2)^{\frac{1}{2}} < 1$.

Достаточно показать, что $\rho(f(x), f(0)) \le \alpha\rho(x, 0)$. Имеем[5]

$$\rho^2(f(x), f(0)) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j)^2 \le \sum_{k=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^2)(\sum_{j=1}^{n} x_j^2) = \alpha^2\rho^2(x, 0).$$

Покажем, что условие $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2 < 1$ не является необходимым при $n > 1$. Пусть $A = \alpha E$, где E — единичная матрица, $\alpha = \sqrt{\frac{3}{2n}} < 1$. Тогда отображение f является сжатым, хотя $\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}^2 = n\alpha^2 > 1$.

5.30. Рассмотрим бесконечную систему линейных уравнений

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}x_j + b_k, k \in \mathbf{N}, b = (b_1, b_2, \dots) \in l_2.$$

или $Ax^t + b^t = x^t, A = ||a_{kj}||, x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$. **Является ли условие** $\sum_{k,j=1}^{\infty} a_{kj}^2 < 1$ **необходимым и достаточным для того, чтобы имелось единственное решение** $x \in l_2$ **данной системы?**

Решение. Покажем, что данное условие является достаточным. Обозначим $\alpha = \sqrt{\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{kj}^2}$. Тогда $\alpha < 1$ и, так как[6]

$$(*)\quad \sum_{k=1}^{\infty}(Ax^t)_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}x_j)^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^2)(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2) = \alpha^2(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2) < \infty,$$

[5] здесь используется неравенство Коши-Буняковского.

[6] здесь используется неравенство Коши-Буняковского для последовательностей

то $Ax^t + b^t \in l_2$, отображение $f : f(x)^t = Ax^t + b^t$ переводит полное метрическое пространство l_2 в себя и, согласно (*), является сжимающим. Значит система имеет единственное решение. С другой стороны, условие не является необходимым, так как при $a_{kj} = 2\delta_{kj}$, где $\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$, $\delta_{kk} = 1$, система имеет единственное решение, а условие не выполнено.

5.31. Доказать, что система линейных уравнений

$$x_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}x_j + b_k, k \in \mathbf{N}(Ax^t + b^t = x^t)$$

имеет единственное решение в пространстве l^p, если $b = (b_1, b_2, \dots) \in l_p$ и:

а) при $p > 1$ выполнено условие $\alpha = (\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^{\frac{p}{p-1}})^{p-1})^{\frac{1}{p}} < 1$;

б) при $p = 1$ выполнено условие $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \sup_j |a_{kj}| < 1$.

Решение. а) Обозначим $q = \frac{p}{p-1}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. Пусть $x \in l_p$. Используя неравенство Гельдера для последовательностей, получаем

$$|(Ax_t)_k| = |\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}x_j| \leq (\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^q)^{\frac{1}{q}}(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}, k \in \mathbf{N},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(Ax^t)_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}|^q)^{\frac{p}{q}}(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p) = \alpha^p(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p).$$

Таким образом, $Ax^t \in l_p$ и отображение $f : l_p \to l_p$, $f^t(x) = Ax^t + b^t$ является сжимающим, следовательно система имеет единственное решение.

б) При $p = 1$ и $x \in l_1$ имеем

$$|(Ax^t)_k| = |\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}x_j| \leq \sup_j |a_{kj}| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(Ax^t)_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sup_j |a_{kj}| \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|.$$

Таким образом $Ax^t \in l_p$ и отображение $f : l_p \to l_p$, $f^t(x) = Ax^t + b^t$ является сжимающим в полном пространстве l_p, следовательно система имеет единственное решение.

5.32. Пусть $y \in C[a, b]$, $K \in C([a, b] \times [a, b])$, $M = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s)|ds$. Доказать, что:

а) отображение $f : C[a, b] \to C[a, b]$,

$$f(x)(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)x(s)ds + y(t)$$

является сжимающим при $|\lambda|M < 1$.

б) Интегральное уравнение Фредгольма II рода

$$x(t) - \int_a^b K(t,s)x(s)ds = y(t)$$

имеет единственное непрерывное решение при $M < 1$.

Решение. а) Пусть $x_1, x_2 \in C[a,b]$. Тогда

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = \max_{t\in[a,b]} |\lambda \int_a^b K(t,s)(x_1(s) - x_2(s))ds| \le \lambda M \rho(x_1, x_2).$$

Поэтому f — сжимающее отображение при $|\lambda| M < 1$.

б) Согласно а), f — сжимающее отображение, поэтому интегральное уравнение Фредгольма второго рода имеет единственное непрерывное решение.

5.33. Пусть задано отображение $f : C[a,b] \to C[a,b]$,

$$f(x)(t) = \lambda \int_a^b K(t,s,x(s))ds + \phi(t),$$

где $\phi \in C[a,b]$, $K \in C([a,b]\times[a,b]\times\mathbf{R})$, K удовлетворяет условию Липшица по своему "функциональному аргументу": $|K(s,t,u_1) - K(s,t,u_2)| \le M|u_1 - u_1|$. Показать, что при $\lambda M < \frac{1}{b-a}$ отображение f является сжимающим.

Решение. а) Пусть $x_1, x_2 \in C[a,b]$. Тогда

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) = \max_{t\in[a,b]} |\lambda \int_a^b (K(t,s,x_1(s)) - K(t,s,x_2(s)))ds| \le \lambda M(b-a)\rho(x_1,x_2).$$

Поэтому отображение f является сжимающим при $|\lambda| M < \frac{1}{b-a}$.

5.34. Пусть функции $K(t,s)$, $\phi(t)$ непрерывны по своим переменным. Доказать, что для любого λ отображение $f : C[a,b] \to C[a,b]$,

$$f(x)(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)x(s)ds + \phi(t)$$

имеет единственную неподвижную точку.

Решение. Согласно задаче 5.28, достаточно показать, что для некоторого n отображение f^n сжимающее. Обозначим $M = \max_{t,s\in[a,b]} |K(t,s)|$. Тогда для любых $x_1(t), x_2(t) \in C[a,b]$ имеем

$$|f(x_1) - f(x_2)|(t) = |\lambda \int_a^t K(t,s)(x_1(s) - x_2(s))ds| \le |\lambda| M(t-a)\rho(x_1,x_2).$$

Отсюда

$$|f^2(x_1) - f^2(x_2)|(t) = |\lambda \int_a^t K(t,s)(f(x_1)(s) - f(x_2)(s))ds| \le$$

$$\leq |\lambda|^2 M^2 \rho(x_1, x_2) \int_a^t (s-a)ds = \lambda^2 M^2 \rho(x_1, x_2) \frac{(t-a)^2}{2}.$$

Применяя индукцию, получаем

$$|f^n(x_1) - f^n(x_2)|(t) \leq \frac{1}{n!} \lambda^n M^n (t-a)^n \rho(x_1, x_2).$$

Но $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^n M^n (b-a)^n}{n!} = 0$, поэтому для достаточно больших n отображение f^n является сжимающим.

5.35. Пусть M — пространство многочленов $P(x)$, заданных на отрезке $[0,1]$ с метрикой $\rho(P_1, P_2) = \max_{x\in[0,1]} |P_1(x) - P_2(x)|$ и $Q(x) \in M$. Доказать, что отображение $f : M \to M$, $f(P)(x) = \lambda \int_0^x P(y)dy + Q(x)$ является сжимающим тогда и только тогда, когда $|\lambda| < 1$ и что для любого λ отображение f имеет не более одной неподвижной точки.[7]

Решение. При $P_1(x), P_2(x) \in M$ имеем $\rho(f(P_1), f(P_2)) \leq |\lambda| \rho(P_1, P_2)$, поэтому при $|\lambda| < 1$ отображение f является сжимающим. Если же $|\lambda| \geq 1$, то при $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = 0$, получим $\rho(P_1, P_2) = 1$, $\rho(f(P_1), f(P_2)) = |\lambda| \geq 1$, поэтому отображение f не является сжимающим.

Пусть $P_1(x)$, $P_2(x)$ — две неподвижные точки отображения f. Тогда для $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$ имеем $P(x) = \lambda \int_0^x P(y)dy$ и, поскольку $P(x)$ — многочлен, то $P(x) = 0$, то есть $P_1(x) = P_2(x)$.

5.36. Пусть $f(x) : C[0, \frac{\pi}{2}] \to C[0, \frac{\pi}{2}]$,

$$(*) \qquad f(x)(t) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t+y) x(y) dy + \cos t.$$

При каких λ отображение f будет сжимающим? При каких λ отображение f будет иметь неподвижную точку? Найти неподвижную точку при $\lambda = 2$.

Решение. Используем задачу 5.32. В ее обозначениях

$$M = \max_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t+y)dy = \sqrt{2},$$

поэтому при $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ отображение f является сжимающим. При остальных λ для $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 0$, получим $\rho(x_1(t), x_2(t)) = 1$, $\rho(f(x_1)(t), f(x_2)(t)) = |\lambda|\sqrt{2} \geq 1$, поэтому отображение f не является сжимающим.

Если $x(t)$ — неподвижная точка отображения f, то, согласно $(*)$, $x(t) = A_1 \sin t + A_2 \cos t$, где A_1, A_2 — константы. Подставив это выражение в $(*)$, получим систему

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\lambda}{4}(\pi A_2 + 2A_1) \\ A_2 = \frac{\lambda}{4}(\pi A_1 + 2A_2) + 1 \end{cases}$$

[7] Пространство M не является полным, поэтому принцип сжимающих отображений неприменим. В частности при $Q(x) = 1$ и $\lambda \neq 0$ отображение f не имеет неподвижных точек. Иначе $P(x) = \lambda \; {}_0^x P(y)dy + 1 (1)$, поэтому $P'(x) = \lambda P(x)$ и, поскольку $P(x)$ — многочлен, то $P = 0$, что противоречит (1).

Система совместна тогда и только тогда, когда $\lambda \neq \frac{2}{1 \pm \frac{\pi}{2}}$. При $\lambda = 2$ получаем $A_1 = \frac{-2}{\pi}$, $A_2 = 0$, $x(t) = \frac{-2}{\pi} \sin t$.

5.37. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет условиям $0 \leq f(x) \leq 1$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$. Имеет ли уравнение $x = f(x)$ решение?

Решение. Да, так как $f(x)$ отображает полное метрическое пространство (отрезок $[0,1]$) в себя и по теореме Лагранжа $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$. Таким образом, отображение f сжимающее и имеет единственную неподвижную точку.

5.38. Решить интегральные уравнения в $C[0,\pi]$:

а) $f(x) = \lambda \int_0^\pi \sin t f(t) dt + \cos t$;

б) $f(x) = \lambda \int_0^x e^{x-\xi} f(\xi) d\xi$.

Решение. В случае а) $f(x) = C + \cos t$, C — постоянная. Подставив это выражение в уравнение а), получаем $C = 0$ при $\lambda \neq \frac{1}{2}$ и C — любое при $\lambda = \frac{1}{2}$.

В случае б) функция $f(x) = 0$ является решением. Согласно задаче 5.34, решение единственно.

ГЛАВА VI. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть X — некоторое множество. *Топологией* в X называется любая система τ его подмножеств, удовлетворяющая условиям:

1. Множество X и пустое множество $\emptyset$ принадлежат τ.

2. Объединение $\cup_\alpha G_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) числа множеств из τ принадлежит τ.

3. Пересечение $\cap_{k=1}^n G_n$ любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

Множество X с заданной на нем топологией τ, то есть пара (X, τ), называется *топологическим пространством*.

Пример. Пусть X — некоторое множество. Система τ, состоящая из всех подмножеств множества X, является топологией. Эта топология называется *дискретной*.

Множества, принадлежащие системе τ называются *открытыми*. Множества, дополнительные к открытым, называются *замкнутыми*. Таким образом:

1. Множество X и пустое множество $\emptyset$ открыты и замкнуты одновременно.

2. Пересечение $\cap_\alpha G_\alpha$ любого (конечного или бесконечного) числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

3. Объединение $\cup_{k=1}^n G_n$ любого конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.

Окрестностью точки x топологического пространства X называется любое открытое множество $G \subset X$, содержащее x. Таким образом, множество $Q \subset X$ будет открытым тогда и только тогда, когда вместе с любой своей точкой оно содержит некоторую ее окрестность.

Точка $x \in X$ называется *точкой прикосновения* множества $M \subset X$, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M. Совокупность всех точек прикосновения множества M называется *замыканием* множества M и обозначается $\overline{M}$.

Точка $x \in X$ называется *предельной* точкой множества $M \subset X$, если каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку из M, отличную от x. Отметим, что множество является замкнутым тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Точка $a \in X$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ точек множества X, если каждая окрестность точки a содержит все элементы последовательности $\{x_n\}$ кроме, быть может, конечного их числа.

Семейство B открытых множеств называется *базой топологии* пространства X, если всякое открытое множество пространства X является объединением некоторого числа множеств из B.

Система U открытых множеств, содержащих точку x, называется *определяющей системой окрестностей* точки x топологического пространства X, если любая окрестность G точки x содержит некоторое множество из системы U.

Произвольное топологическое пространство представляет собой слишком общий объект с точки зрения анализа. Поэтому удобно к аксиомам топологического пространства присоединять дополнительные условия. Важный тип дополнительных условий составляют так называемые аксиомы отделимости.

Первая аксиома отделимости. *Для любых двух различных точек x и y пространства X существуют окрестность O_x точки x, не содержащая y, и окрестность O_y точки y, не содержащая x.*

Вторая или хаусдорфова аксиома отделимости. *Любые две различные точки x и y имеют непересекающиеся окрестности O_x и O_y.*

Топологические пространства, для которых выполнена вторая аксиома отделимости, называются *хаусдорфовыми*.

Пусть на одном и том же множестве X заданы две топологии τ_1, τ_2. Тем самым определены два топологических пространства (X, τ_1), (X, τ_2). Топология τ_1 *сильнее* топологии τ_2, если система множеств τ_2 содержится в τ_1. При этом τ_2 *слабее*, чем τ_1 ($\tau_2 < \tau_1$). Заметим, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к $a \in X$ относительно топологии τ_1, то она сходится к a и относительно τ_2, где $\tau_2 < \tau_1$.

Топологическое пространство X называется *несвязным*, если оно содержит непустое собственное подмножество M, которое одновременно открыто и замкнуто. В противном случае X называется *связным*.

Пусть X и Y — два топологических пространства. Отображение f пространства X в пространство Y называется *непрерывным в точке* x_0, если для любой окрестности U_{y_0} точки $y_0 = f(x_0)$ найдется окрестность U_{x_0} точки x_0 для которой $f(U_{x_0}) \subset U_{y_0}$. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным* (обозначается $f \in C(X)$), если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Критерий непрерывности. *Отображение f топологического пространства X в топологическое пространство Y непрерывно если и только если прообраз $\Gamma = f^{-1}(G)$ каждого открытого множества $G \subset Y$ открыт (в X).*

Взаимно однозначное отображение f топологического пространства X на топологическое пространство Y называется *гомеоморфизмом*, если $f \in C(X)$ и $f^{-1} \in C(Y)$. При этом пространства X и Y называют *гомеоморфными*.

Множество X называется *линейным топологическим пространством*, если:

1. X снабжено структурой линейного пространства над полем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$,
2. X снабжено структурой топологического пространства,
3. операции сложения и умножения на скаляры в X непрерывны относительно заданной в X топологии. Подробнее последнее условие означает следующее:

а) если $z_0 = x_0 + y_0$, то для каждой окрестности U_{z_0} точки z_0 существуют такие окрестности U_{x_0} и U_{y_0} точек x_0 и y_0, что $x + y \in U_{z_0}$ при $x \in U_{x_0}$, $y \in U_{y_0}$;

б) если $\alpha_0 x_0 = y_0$, то для любой окрестности U_{y_0} точки y_0 существует такая окрестность U_{x_0} точки x_0 и такое число $\varepsilon > 0$, что $\alpha x \in U_{x_0}$ при $|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon$ и $x \in U_{x_0}$.

Топология в линейном топологическом пространстве полностью определяется заданием определяющей системы окрестностей нуля, так как для любой точки $x \in X$ и окрестности нуля U множество $U + x$ является окрестностью точки x и обратно, если U_x — окрестность точки x, то $U_x - x$ есть окрестность нуля. Удобен следующий критерий.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Линейное пространство X является линейным топологическим пространством тогда и только тогда, когда в нем выделена непустая совокупность непустых подмножеств $V = \{u, v, \ldots, w, \ldots\}$, удовлетворяющая следующим условиям.*

1) Каждое множество $v \in V$ уравновешенное и поглощающее. (Множество v называется уравновешенным, если из $x \in v$ и $|\lambda| \leq 1$ следует $\lambda x \in v$. Множество v называется поглощающим, если для любого $x \in X$ найдется такое число $\alpha > 0$, что $x \in \beta v$ при $|\beta| \geq \alpha$.)

2) Для любых $u, v \in V$ найдется $w \in V$ такое, что $w \subset u \cap v$.

3) Для каждого $u \in V$ найдется $v \in V$ такое, что $v + v \subset u$.

При этом множество G будет открытым, если для каждой точки $x \in G$ найдется множество $u \in V$ такое, что $u + x \subset G$.

Задачи

6.1. Пусть (M, ρ) —метрическое пространство (см. главу 5). Доказать, что система открытых множеств в M задает хаусдорфову топологию, причем система открытых шаров является базой этой топологии.

Решение. По определению пустое множество $\emptyset$ является открытым, так как не содержит точек, а все пространство M является открытым, так как содержит любой открытый шар.

Пусть $G = \cup_\alpha G_\alpha$ и все G_α открыты. Любая точка $x \in G$ содержится в некотором G_α. Так как G_α открыто, то найдется открытый шар $B_{x,R(x)} \subset G_\alpha$. Значит, $B_{x,R(x)} \subset G$ и G открыто.

Если $G = \cap_{k=1}^n G_k$, где все G_k открыты, то любая точка $x \in G$ содержится в каждом G_k, поэтому при $1 \leq k \leq n$ найдутся открытые шары $B_{x,R_k(x)} \subset G_k$. Обозначим $R(x) = \min\{R_1(x) \ldots R_n(x)\}$. Тогда $B_{x,R(x)} \subset B_{x,R_k(x)} \subset G_k$ при $1 \leq k \leq n$, значит $B_{x,R(x)} \subset G$. Таким образом, система открытых множеств задает топологию. По условию, если $G \subset M$ открыто, то $G = \cup_{x \in G} B_{x,R(x)}$, отсюда система открытых шаров является базой топологии.

Проверим, что выполнена вторая аксиома отделимости. Пусть x, y — различные точки M. Обозначим $d = \frac{1}{4}\rho(x,y)$. Тогда $B_{x,d} \cap B_{y,d} = \emptyset$, так как иначе для $z \in B_{x,d} \cap B_{y,d}$ из неравенства треугольника имеем $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(y,z) \leq \frac{1}{2}\rho(x,y)$, что противоречит $x \neq y$.

6.2. Пусть S^n есть n-мерная единичная сфера в $\mathbf{R}^{n+1}$, $a \in S^n$. Доказать, что $S^n \setminus a$ и $\mathbf{R}^n$ гомеоморфны.[1]

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{R}^n = \{x_{n+1} = 0\}$, $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}), x_1^2 + \cdots + x_n^2 + (x_{n+1} - 1)^2 = 1\}$, $a = (0, \ldots, 0, 2)$.

---

[1] Мы полагаем, что топология на S^n индуцирована стандартной топологией в $\mathbf{R}^{n+1}$, то есть множество $u \subset S^n$ является открытым, если $u = S^n \cap U$, где U — открытое множество в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Любой точке $s \in S^n \setminus a$ сопоставим $f(s) \in \mathbf{R}^n$ следующим образом: $f(s)$ — точка пересечения прямой, проходящей через a и s с плоскостью $\mathbf{R}^n$. Если $s = (s_1, \ldots, s_{n+1})$, то $f(s) = (2s_1/(2 - s_{n+1}), \ldots, 2s_n/(2 - s_{n+1}))$. Отображение $f(s)$ непрерывно на $S^n \setminus a$, так как задается непрерывными функциями на $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{x_{n+1} = 2\}$. Обратное отображение задается так: если $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$, то $s_{n+1} = 2r^2/(r^2 + 4)$, $s_k = 4x_k/(r^2 + 4)$ при $1 \le k \le n$. Поэтому $f^{-1}(x)$ определено на всем $\mathbf{R}^n$ и непрерывно, то есть $f(s)$ является гомеоморфизмом.

6.3. В пространстве $C[a, b]$ сравнить топологии: τ_1, порожденную метрикой $\rho_1(f, g) = \max_{[a,b]} |f - g|$ и τ_2, порожденную метрикой $\rho_2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

Решение. Покажем, что: 1) τ_1 сильнее τ_2, 2) обратное неверно.

1) Поскольку обе топологии заданы метриками, то базой каждой из топологий τ_i являются открытые шары $B_i(f, r) = \{g \in C[a, b] : \rho_i(f, g) < r\}$, где $f \in C[a, b]$, $r > 0$, $i = 1, 2$. Поэтому достаточно показать, что любой шар $B_2(f, r)$ принадлежит τ_1, то есть, что любая точка $g \in B_2(f, r)$ содержится в $B_2(f, r)$ вместе с некоторым шаром $B_1(g, \varepsilon_g)$.

Действительно, если $h \in B_1(g, \varepsilon_g)$, то $\max_{[a,b]} |g(x) - h(x)| < \varepsilon_g$. Из неравенства треугольника $\rho_2(f, h) \le \rho_2(f, g) + \rho_2(g, h)$. Так как $\rho_2(f, g) < r$, а $\rho_2(g, h) = \int_a^b |h(x) - g(x)| dx < \varepsilon_g(b - a)$, то для достаточно малых ε_g верно $\rho_2(f, h) < r$, отсюда $B_1(g, \varepsilon_g) \subset B_2(f, r)$.

2) Рассмотрим последовательность $f_n(x) \in C[a, b]$, $f_n(x) = (x - a)^n (b - a)^{-n}$. Так как $\rho_2(f_n, 0) = (b - a)/(n + 1) \to 0$ при $n \to \infty$, а $\rho_1(f, 0) = 1$, то $f_n(x)$ сходится к нулю относительно топологии τ_2, но не сходится к нулю относительно топологии τ_1. Поэтому τ_2 не сильнее τ_1.

6.4. Пусть E — ограниченное измеримое множество ненулевой меры. Рассмотрим совокупность M функций $f(x) \in L_{p_1}(E) \cap L_{p_2}(E)$, $p_1 > p_2$. Сравнить топологии: τ_1, порожденную метрикой пространства L_{p_1} и τ_2, порожденную метрикой пространства L_{p_2}.

Решение. Покажем, что: 1) τ_1 сильнее τ_2, 2) обратное неверно.

Обозначим:

$$||f(x)||_k = (\int_E |f(x)|^{p_k} dx)^{1/p_k}, k = 1, 2.$$

1) Так как τ_1 и τ_2 — метрики на M, то достаточно показать, что любой принадлежащий τ_2 шар $B_2(f, r) = \{g \in M : ||f - g||_2 < r\}$, $f \in M$, $r > 0$, содержится и в τ_1, то есть вместе с каждой своей точкой $g \in B_2(f, r)$ содержит и некоторый открытый относительно τ_1 шар $B_1(g, \varepsilon_g) = \{h \in M : ||g - h||_1 < \varepsilon_g\}$, $\varepsilon_g > 0$.

Обозначим $c = ||f - g||_2$, $p = p_1/p_2$, $q = p_1/(p_1 - p_2)$. Тогда $c < r, p > 1, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$. Из неравенства треугольника $||f - h||_2 \le ||f - g||_2 + ||g - h||_2 = c + ||g - h||_2$. Из неравенства Гельдера для интегралов

$$||g - h||_2^{p_2} = \int_E |g - h|^{p_2} \cdot 1 dx \le (\int_E |g - h|^{p_1} dx)^{1/p} (\int_E 1^q dx)^{1/q} < \varepsilon_g{}^{p_2} (\mu(E))^{1/q}.$$

Отсюда для достаточно малых ε_g имеем $||g - h||_2 < r - c$, значит $||f - h||_2 < r$, поэтому $B_1(g, \varepsilon_g) \subset B_2(f, r)$.

2) В силу непрерывности меры Лебега, для любого $n > 1/\mu(E)$ существует множество $E_n \subset E$ меры $\mu(E_n) = 1/n$. Последовательность функций $\{f_n\}$ из M,

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{1/p_1}, \text{ если } x \in E_n \\ 0, \text{ если } x \in E \setminus E_n \end{cases}$$

сходится к тождественному нулю относительно τ_2, ибо $||f_n(x)||_2 = n^{(p_2-p_1)/p_1p_2}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, но $||f_n(x)||_1 = 1$. Поэтому τ_2 не сильнее τ_1.

6.5. Пусть X — множество непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$. Сравнить две топологии, порожденные метриками:

$$\tau_1 : \rho_1(x,y) = \sup_{[0,1]} |x(t) - y(t)|,$$

$$\tau_2 : \rho_2(x,y) = \sup_{[0,1]} |x(t) - y(t)| + \sup_{[0,1]} |x'(t) - y'(t)|.$$

Решение. Покажем, что: 1) τ_2 сильнее τ_1, 2) обратное неверно.

1. Так как обе топологии порождены метриками, то достаточно показать, что любой принадлежащий τ_1 шар $B_1(x,r) = \{y \in X : \rho_1(x,y) < r\}$, $x \in X$, $r > 0$, принадлежит и τ_2, то есть, что $B_1(x,r)$ вместе с каждой своей точкой y содержит и некоторый шар $B_2(y,\varepsilon) = \{z \in X : \rho_2(y,z) < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Обозначим $c = \rho_1(x,y)$. Возьмем $\varepsilon = r - c$. Поскольку $\rho_1(y,z) \le \rho_2(y,z)$, то для $z \in B_2(y,\varepsilon)$ выполнено $\rho_1(x,z) \le \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z) < c + \varepsilon < r$, то есть $B_2(y,\varepsilon) \subset B_1(x,r)$.

2. Последовательность функций $\{x_n(t)\}$ из X, $x_n(t) = t^n/n$ сходится к нулю относительно τ_1, так как $\rho_1(x_n, 0) = 1/n$, но не сходится к нулю относительно τ_2, так как $\rho_2(x_n, 0) = 1/n + 1$.

6.6. а) Пусть топологическое пространство E связно и $f : E \to \mathrm{R}$ — непрерывная функция. Доказать, что f принимает все промежуточные значения, т.е. если $a, b \in f(E)$ и $a < b$, то $[a,b] \subset f(E)$.

б) Пусть топологическое пространство E таково, что любая непрерывная вещественнозначная функция вместе с любыми двумя своими значениями принимает также и все промежуточные значения. Доказать, что E связно.

Решение. а) Допустим, что $\exists c \in (a,b)$: $c \notin f(E)$. Тогда множества $M_1 = f^{-1}((-\infty, c))$, $M_2 = f^{-1}((c, \infty))$ не пусты и являются открытыми в силу непрерывности отображения f. Так как $E = M_1 \cup M_2$ и $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, то множества M_1, M_2 замкнуты. Отсюда E представимо в виде объединения двух непустых множеств, которые одновременно открыты и замкнуты, что противоречит связности E.

б) Допустим, что E несвязно. Тогда $E = M_1 \cup M_2$, где оба множества M_1, M_2 непусты и одновременно открыты и замкнуты. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in M_1 \\ 0, \text{ если } x \in M_2 \end{cases}$$

является непрерывной, так как прообраз любого (в том числе открытого) множества на вещественной прямой либо пуст, либо совпадает с одним из M_1, M_2, либо совпадает с E. Но f принимает только два значения, что противоречит условию.

6.7. Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ — метрическое пространство со стандартной метрикой пространства R^n. Пусть M выпукло, т.е. для любых $x, y \in M$ множество M содержит отрезок $[x, y]$. Показать, что M связно[2].

Решение. Допустим, что M несвязно, то есть $M = M_1 \cup M_2$, где M_1, M_2 — два непересекающихся открытых подмножества множества M. Выберем $x_1 \in M_1$, $y_1 \in M_2$. Пусть $x = (x_1 + y_1)/2$ — середина отрезка $[x_1, y_1]$. Если $x \in M_1$, полагаем $x_2 = x$, $y_2 = y_1$, иначе полагаем $x_2 = x_1$, $y_2 = x$. Тогда $x_2 \in M_1$, $y_2 \in M_2$, $\rho(x_2, y_2) = \frac{1}{2}\rho(x_1, y_1)$. Далее берем середину отрезка $[x_2, y_2]$ и аналогично строим $x_3 \in M_1$, $y_3 \in M_2$, $\rho(x_3, y_3) = \frac{1}{2}\rho(x_2, y_2)$. Продолжив процесс по индукции, получаем две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, сходящиеся к одной и той же точке a отрезка $[x, y]$. Поэтому $a \in M$. Если $a \in M_1$, то, в силу открытости M_1 у точки a есть окрестность, целиком лежащая в M_1, что противоречит $a = \lim_{n\to\infty} y_n$. Аналогично $a \notin M_2$ — противоречие.

6.8. Доказать, что на прямой $\mathbf{R}$ с метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$ связными множествами являются только множества вида $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $\emptyset$, одноточечное множество.

Решение. Все перечисленные множества выпуклы, поэтому связны (см. предыдущую задачу). Отметим, что любое выпуклое множество $M \subset R$ является одним из перечисленных множеств. Действительно, если $M \neq \emptyset$, то определим $m_1 = \inf M$, $m_2 = \sup M$. Так как M выпукло, то $(m_1, m_2) \subset M$, то есть M — одно из множеств, удовлетворяющих условию. Осталось показать, что любое связное множество $M \subset \mathbf{R}$ является выпуклым. Допустим, что M не выпукло. Тогда $\exists x \in (m_1, m_2)$: $x \notin M$ (здесь $m_1 = \inf M$, $m_2 = \sup M$). Обозначим $M_1 = M \cap (-\infty, x)$, $M_2 = M \cap (x, +\infty)$. Тогда M_1 и M_2 непустые открытые множества. Так как $M_1 = M \setminus M_2$, то M_1 замкнуто. Таким образом M_1 одновремено открыто и замкнуто, что противоречит связности M.

6.9. Привести пример гомеоморфизма одного метрического пространства на другое, при котором нарушается полнота пространства.

Решение. Пусть $X = \mathbf{R}$, $Y = (-\pi/2, \pi/2)$ — пространства с одной и той же метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Тогда пространство X — полное, пространство Y — неполное. Отображение $f : X \to Y$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ — искомый гомеоморфизм.

6.10. Показать, что $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^2$ с топологиями, заданными стандартными метриками, не гомеоморфны.

Решение. Допустим противное. Тогда существует гомеоморфизм $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Обозначим $a = f(0)$, $A_1 = f^{-1}(a - 1)$, $A_2 = f^{-1}(a + 1)$. Пусть $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ — непрерывная кривая с началом в A_1 и концом в A_2 (например дуга окружности, не проходящая через начало координат) . Так как $f \cdot \gamma \in C[0, 1]$, то $f \cdot \gamma$ должна принимать все промежуточные значения между $a - 1$ и $a + 1$, то есть существует $t_1 \in [0, 1] : f(\gamma(t_1)) = a$. Но $\gamma(t_1) \neq 0$, что противоречит взаимной однозначности f.

6.11. Может ли тождественное отображение $(X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ одного

---

[2] Отсюда, в частности следует, что R^n связно.

и того же множества X, снабженного разными топологиями, не быть гомеоморфизмом?

Решение. Да, например $X = [0,1]$, τ_1 порождена метрикой $\rho_1(x,y) = |x-y|$, τ_2 порождена дискретной метрикой $\rho_2(x,y) = 1$ при $x \neq y$, $\rho_2(x,x) = 0$. Тогда любая точка отрезка $[0,1]$ принадлежит τ_2, но не принадлежит τ_1. Так как при непрерывном отображении прообраз открытого множества открыт, то тождественное отображение не является непрерывным, а значит и не является гомеоморфизмом.

6.12. Привести пример топологического пространства, в котором:
а) не выполнена первая аксиома отделимости,
б) выполнена первая аксиома отделимости, но не выполнена вторая аксиома отделимости.

Решение. а) $X = [0,1]$, $\tau = \{\emptyset, X\}$. Тогда (X,τ) — топологическое пространство, в котором любая точка имеет единственную окрестность — все множество X. Поэтому в (X,τ) не выполнена первая аксиома отделимости, Заметим, что в данной топологии любая последовательность $\{x_n\}$ точек из X имеет пределом любое число $x \in X$.

б) Положим $X = \mathbf{R}$. Назовем множество $U \subset X$ открытым, если либо $X \setminus U$ есть объединение конечного числа точек, либо $U = X$, либо $U = \emptyset$. Это задает искомую топологию τ, так как для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, окрестности $U_x = \mathbf{R} \setminus y$ и $U_y = \mathbf{R} \setminus x$ не содержат соответственно точек y и x. Однако пересечение любых двух непустых множеств из τ непусто, поэтому не выполнена вторая аксиома отделимости.

6.13. Назовем множество $U \subset \mathbf{C}^n$ открытым, если $V = \mathbf{C}^n \setminus U$ является множеством общих нулей некоторого набора полиномов p_α, то есть $V = \{x \in \mathbf{C}^n : p_\alpha(x) = 0, \alpha \in A\}$[3]. Доказать, что так определенные открытые множества образуют топологию в $\mathbf{C}^n$, в которой выполнена первая аксиома отделимости, но не выполнена вторая аксиома отделимости.[4]

Решение. $\mathbf{C}^n$ и $\emptyset$ являются замкнутыми и открытыми, так как $\mathbf{C}^n = \{x \in \mathbf{C}^n : 0 = 0\}$, $\emptyset = \{x \in \mathbf{C}^n : 1 = 0\}$.

Пусть $V_\beta, \beta \in B$ — любой набор замкнутых множеств, то есть $V_\beta = \{x \in \mathbf{C}^n : p_{\alpha_\beta}(x) = 0, \alpha_\beta \in A_\beta\}$. Тогда

$$\cap_{\beta \in B} V_\beta = \{x \in \mathbf{C}^n : p_\alpha(x) = 0, \alpha \in \cup_{\beta \in B} A_\beta\},$$

поэтому пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

Пусть $V_j, j = 1, \ldots, k$ — любой конечный набор замкнутых множеств, то есть $V_j = \{x \in \mathbf{C}^n : p_{\alpha_j}(x) = 0, \alpha_j \in A_j\}$. Проверим, что $V = \cup_{j=1}^k V_j$ — замкнутое множество. Пусть $A = A_1 \times \cdots \times A_k$ — множество индексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k), \alpha_j \in A_j, j = 1, \ldots, k$. Обозначим $p_\alpha(x) = p_{\alpha_1}(x) \ldots p_{\alpha_k}(x)$, $V' = \{x \in \mathbf{C}^n : p_\alpha(x) = 0, \alpha \in A\}$. Покажем, что $V' = V$. Действительно, при $x \in V_j$ все $p_{\alpha_j}(x)$ равны нулю, значит и все $p_\alpha(x)$ тоже равны нулю, поэтому $V \subset V'$. Пусть $x \notin V$. Тогда существуют индексы $\alpha_1 \in A_1, \ldots, \alpha_k \in A_k$ такие, что

[3]Всегда можно считать множество A конечным, так как всякий идеал в кольце полиномов конечно порожден

[4]Эта топология называется топологией Зарисского.

$p_{\alpha_1}(x) \neq 0, \ldots, p_{\alpha_k}(x) \neq 0$. Отсюда $p_\alpha(x) \neq 0$, поэтому $x \notin V'$. Таким образом $V' = V$.

Возьмем две различные точки $x_1, x_2 \in \mathbf{C}^n$. Всегда существует многочлен $p(x)$ такой, что $p(x_1) \neq 0$, $p(x_2) = 0$. Множество $U = \{x \in \mathbf{C}^n : p(x) \neq 0\}$ является окрестностью точки x_1, не содержащей x_2. Поэтому выполнена первая аксиома отделимости. Покажем, что пересечение $U_1 \cap U_2$ любых двух непустых открытых множеств непусто, а значит вторая аксиома отделимости не выполнена. Обозначим $V_1 = \mathbf{C}^n \setminus U_1$, $V_2 = \mathbf{C}^n \setminus U_2$, $V_j = \{x \in \mathbf{C}^n : p_{\alpha_j}(x) = 0, \alpha_j \in A_j\}$, $j = 1, 2$. Так как U_1, U_2 непусты, то ни одно из V_1, V_2 не совпадает с $\mathbf{C}^n$, поэтому можно считать, что ни один из $p_{\alpha_j}(x)$ не равен тождественно нулю. Достаточно показать, что $V_1 \cup V_2 \neq \mathbf{C}^n$. Так как $V_1 \cup V_2 = \{x \in \mathbf{C}^n : p_{\alpha_1}(x)p_{\alpha_2}(x) = 0, \alpha_1 \in A_1, \alpha_2 \in A_2\}$ и произведение $p_{\alpha_1}(x)p_{\alpha_2}(x)$ двух тождественно не равных нулю многочленов не равно тождественно нулю, то $V_1 \cup V_2 \neq \mathbf{C}^n$.

6.14. Пусть $\mathbf{R}^\infty$ — пространство всех вещественных последовательностей $x = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$. Доказать, что $\mathbf{R}^\infty$ с определяющей системой окрестностей нуля $U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^\infty : |x_{k_i}| < \varepsilon, i = 1, 2, \ldots, p\}$ (индексы $k_1, k_2, \ldots k_p$ — натуральные числа, $\varepsilon > 0$), является линейным топологическим пространством.

Решение. Так как для любых $x = \{x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots y_n, \ldots\}$ из $\mathbf{R}^\infty$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ линейная комбинация $z = \alpha x + \beta y = \{\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \ldots \alpha x_n + \beta y_n, \ldots\} \in \mathbf{R}^\infty$, то $\mathbf{R}^\infty$ является линейным пространством. Покажем, что совокупность $V = \{U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon)\}$ удовлетворяет всем условиям утверждения 1.

1) Если $x \in U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon)$ и $|\lambda| \leq 1$, то $|(\lambda x)_{k_i}| = |\lambda x_{k_i}| < \varepsilon$ при $i = 1, 2, \ldots p$, значит $\lambda x \in U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon)$, поэтому $U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon)$ — уравновешенное множество.

Пусть $x \in \mathbf{R}^\infty$ — любая точка. Обозначим $M = \max\{|x_{k_1}|, |x_{k_2}|, \ldots |x_{k_p}|\}$, $\alpha = (M+1)/\varepsilon$. Пусть $\beta \geq \alpha$. Тогда $\beta U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon) = U(k_1, k_2, \ldots k_p, \beta\varepsilon)$ и $x \in \beta U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon)$, отсюда $U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon)$ — поглощающее множество.

2) Пусть $U_1 = U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon_1)$, $U_2 = U(l_1, l_2, \ldots l_q, \varepsilon_2)$ — два произвольных подмножества V. Обозначим $s = \max\{k_1, k_2, \ldots k_p, l_1, l_2, \ldots l_q\}$, $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, $U_3 = U(1, 2, \ldots s, \varepsilon)$. Тогда $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

3) Пусть $U = U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon) \subset V$. Тогда для $Y = U(k_1, k_2, \ldots k_p, \varepsilon/2) \subset V$ имеем $Y + Y \subset U$.

Таким образом выполнены все условия критерия, значит $\mathbf{R}^\infty$ является топологическим пространством.

6.15. Пусть $K[a, b]$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$. Доказать, что $K[a, b]$ с определяющей системой окрестностей нуля $U_{m,\varepsilon} = \{f(x) \in K[a, b] : |f^{(k)}(x)| < \varepsilon, k = 0, 1, \ldots, m\}$ ($m \in \mathbf{N}$, $\varepsilon > 0$) является линейным топологическим пространством.

Решение. Для доказательства достаточно подставить в решение предыдущей задачи окрестность $U_{m,\varepsilon}$ вместо множества $U(1, \ldots, m, \varepsilon) \subset V$.

6.16. Функция $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется финитной, если существует отрезок, вне которого она равна нулю. Рассмотрим линейное пространство D всех бесконечно дифференцируемых финитных функций с определяющей системой окрестностей нуля $U_{f_0, f_1, \ldots f_m} = \{f(x) \in$

$D: |f^{(k)}(x)| < f_k(x), k = 0, 1, \ldots, m\}$, **где** $m = 0, 1, \ldots,$ **функции** $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\ldots$, $f_m(x)$**— непрерывные положительные. Доказать, что** D **является линейным топологическим пространством и определить сходимость в этой топологии.**

Решение. Аналогично задаче 14 покажем, что совокупность множеств $V = \{U(f_0, f_1, \ldots f_m)\}$ удовлетворяет всем условиям критерия топологического пространства.

1) Если $f \in U(f_0, f_1, \ldots f_m)$ и $|\lambda| \leq 1$, то $\lambda f \in U(f_0, f_1, \ldots f_m)$, поэтому $U(f_0, f_1, \ldots f_m)$ — уравновешенное множество.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in D$. Пусть $[a, b]$ — отрезок, вне которого $f = 0$. Обозначим $S = \max_{[a,b]}(\max\{|f(x)|, |f'(x)|, \ldots |f^{(m)}(x)|\})$, $s = \min_{[a,b]}(\min\{f_0(x), f_1(x), \ldots f_m(x)\})$. По условию $s > 0$, $0 \leq S < \infty$. Возьмем $\alpha = S/s$. Пусть $\beta \geq \alpha$. Тогда при $k = 0, 1, \ldots m$ выполнено $|f^{(k)}(x)| \leq S \leq \alpha f_k(x) \leq \beta f_k(x)$. Так как $\beta U(f_0, f_1, \ldots, f_m) = U(\beta f_0, \beta f_1, \ldots, \beta f_m)$, то $f(x) \in \beta U(f_0, f_1, \ldots, f_m)$, отсюда $U(f_0, f_1, \ldots, f_m)$ — поглощающее множество.

2) Пусть $U_1 = U(f_0, f_1, \ldots, f_m)$, $U_2 = U(g_0, g_1, \ldots, g_k)$ — два произвольных подмножества V. Без ограничения общности можно считать $m \geq k$. Обозначим

$$\gamma_l(x) = \begin{cases} \min(f_l(x), g_l(x)) \text{ при } l = 0, 1, \ldots k \\ f_l(x) \text{ при } l = k+1, \ldots, m \end{cases}$$

Тогда функции $\gamma_0(x), \ldots \gamma_m(x)$ являются непрерывными и положительными, и $U(\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_m) \subset U_1 \cap U_2$.

3) Пусть $U = U(f_0, f_1, \ldots, f_m) \subset V$. Тогда для $Y = U(f_0/2, f_1/2, \ldots, f_m/2)$ верно $Y + Y \subset U$.

Таким образом выполнены все условия критерия, значит D является топологическим пространством.

Изучим сходимость в этой топологии. Покажем, что последовательность $\{\phi_n\}$ функций из D сходится к функции $\phi \in D$ тогда и только тогда, когда:

а) существует отрезок, вне которого все ϕ_n и ϕ равны нулю,

б) последовательность $\{\phi_n^{(k)}\}$ равномерно на этом отрезке сходится к $\phi^{(k)}$ при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Необходимость. Обозначим $h_n(x) = \phi_n(x) - \phi(x)$. Допустим от противного, что а) не выполнено. Тогда для любого $C > 0$ существует индекс n, такой что функция $h_n(x)$ не равна тождественно нулю при $|x| > C$. Поэтому при $C = 1$ существуют индекс n_1 и число x_1, $|x_1| > 1$, такие что $h_{n_1}(x_1) \neq 0$. При $C = |x_1| + 1$ существуют n_2 и x_2, $|x_2| > |x_1| + 1$, такие что $h_{n_2}(x_2) \neq 0$, далее по индукции, при любом натуральном $k > 1$ и при $C = |x_{k-1}| + 1$ существуют n_k и x_k, $|x_k| > |x_{k-1}| + 1$, такие что $h_{n_k}(x_k) \neq 0$. Так как все $h_n(x)$ финитны, то $n_k(x) \to \infty$ при $k \to \infty$. Поскольку все x_k различны, то существует положительная непрерывная функция f_0, такая что $f_0(x_k) = |h_{n_k}(x_k)|/2$, $k \in \mathbf{N}$. Мы получили, что открытое множество $\phi + U(f_0)$ не содержит ни одну из бесконечного числа функций ϕ_{n_k}, так как $|\phi_{n_k}(x_k)| = |h_{n_k}(x_k)| > f_0(x_k)$ для достаточно больших k, что противоречит определению предела. Поэтому условие а) выполнено.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и произвольное $m \in \mathbf{N}$. Положим $f_0(x) = \cdots = f_m(x) = \varepsilon$. По определению предела окрестность $U = \phi + U(f_0, f_1, \ldots, f_m)$

содержит все элементы последовательности $\{\phi_n\}$ начиная с некоторого номера N, то есть неравенство $|\phi_n^{(k)}(x) - \phi^{(k)}| < f_k(x) = \varepsilon$ верно при $n \geq N$, $k = 0, 1, \ldots, m$ и $x \in \mathbf{R}$. Значит последовательность $\{\phi_n^{(k)}(x)\}$ равномерно на $\mathbf{R}$ сходится к $\phi^{(k)}(x)$ при $k = 0, 1, \ldots, m$, что доказывает б).

Достаточность. Согласно условию а) существует отрезок $[a, b]$, вне которого $\phi_n(x) = \phi(x) = 0$ для всех $n \in N$. Пусть V — произвольное открытое множество, содержащее $\phi(x)$. Тогда существует окрестность $U_1 \subset V$ вида $U_1 = \phi(x) + U(f_0, f_1, \ldots, f_m)$. Обозначим $\varepsilon_k = \min_{[a,b]} f_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Тогда все $\varepsilon_k > 0$ и в силу б) существуют натуральные $N_0, N_1, \ldots, N_m$ такие, что для любого $x \in [a, b]$ и $k = 0, 1, \ldots, m$ и $n \geq N_k$ верно $|\phi_n^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x)| < \varepsilon_k \leq f_k(x)$. Поэтому при $n \geq \max(N_0, N_1, \ldots, N_k)$ верно $\phi_n(x) \in U_1 \in V$, что и требовалось доказать.

6.17. Показать, что топологию в пространстве D нельзя задать метрикой.

Решение. Предположим от противного, что существует функция ρ, такая, что (D, ρ) — метрическое пространство. Пусть $\phi(x) \in D$, $\phi \neq 0$, $\phi_n^m(x) = \frac{1}{n}\phi(\frac{x}{m})$. Тогда для любого $m \in \mathbf{N}$ последовательность $\{\phi_n^m(x)\}$ сходится к нулю в пространстве D. Поэтому $\forall m \in \mathbf{N}\ \exists n_m : \rho(\phi_{n_m}^m, 0) < 2^{-m}$. Последовательность $g_m = \phi_{n_m}^m$ сходится к нулю, ибо $\lim_{n\to\infty} \rho(g_m, 0) = 0$. С другой стороны не существует отрезка, вне которого все g_m равны нулю. Противоречие.

6.18. Показать, что сходимость почти всюду на отрезке $[0, 1]$ нельзя задать топологией.

Решение. Пусть $n \in \mathbf{N}$. Тогда можно представить $n = 2^k + m$, где $k, m \in \mathbf{N}$, $0 \leq m < 2^k$. Положим $f_n(x) = 1$ при $x \in [\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]$ и $f_n(x) = 0$ при $x \in [0, 1] \setminus [\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}]$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере к функции $f(x) = 0$, но не сходится ни в одной точке отрезка $[0, 1]$.

Предположим, что сходимость почти всюду на отрезке $[0, 1]$ можно задать топологией. Тогда существует окрестность U_f функции f, которая не содержит некоторую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ последовательности $\{f_n\}$. Поскольку последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится к f по мере, то по теореме Рисса, она содержит подпоследовательность, сходящуюся к f почти всюду на отрезке $[0, 1]$, значит все элементы этой подпоследовательности, за исключением быть может конечного их числа, принадлежат U_f. Противоречие.

6.19. Пусть X — линейное топологическое пространство, $A, B \subset X$ и $C = A + B$. Верно ли, что:

а) C открыто, если A и B открыты,

б) C замкнуто, если A и B замкнуты?

Решение. а) Так как для любого $x \in X$ множество $A + x$ открыто, а $C = \cup_{x \in B}(A + x)$, то C — открыто. б) Неверно, например $A = \{-k, k \in \mathbf{N}\}$, $B = \{k + 1/k, k \in \mathbf{N}, k > 1\}$. Тогда C содержит последовательность $1/k$, сходящуюся к $0 \notin C$.

ГЛАВА VII. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА.

Множество X называется *линейным нормированным пространством* (сокращенно ЛНП), если:

1) X является линейным пространством над полем вещественных или комплексных чисел,

2) для любого $x \in X$ определено неотрицательное число $||x||$, называемое нормой элемента x, со следующими свойствами:

а) $||x|| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,

б) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,

в) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.

Две нормы $||x||_1$ и $||x||_2$ называются *эквивалентными*, если существуют положительные постоянные C_1, C_2, такие что $C_1||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C_2||x||_1$.

Утверждение 1. *Все конечномерные ЛНП данного числа измерений n изоморфны евклидову n-мерному пространству $\mathbf{R}^n$ и, следовательно, изоморфны друг другу. В частности, любая норма в n-мерном ЛНП эквивалентна стандартной норме в $\mathbf{R}^n$, следовательно, в конечномерном ЛНП любые две нормы эквивалентны.*

Заметим, что функция $\rho(x, y) = ||x - y||$ является метрикой на X. Следовательно последовательность $\{x_n\}$ сходится к x, или $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, если $\lim_{n\to\infty} ||x - x_n|| = 0$. Определенная таким образом сходимость называется *сходимостью по норме.* Если ЛНП является полным относительно сходимости по норме, то оно называется *банаховым пространством.*

Утверждение 2. *В банаховом пространстве любая последовательность вложенных замкнутых шаров, диаметры которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.*

Вещественное (соответственно комплексное) линейное пространство H называется *гильбертовым пространством*, если

а) H является евклидовым (соответственно унитарным) пространством, то есть для любых $x, y \in H$ определено вещественное (соответственно комплексное) число (x, y), называемое скалярным произведением, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ только при $x = 0$;

2) $(x, y) = (y, x)$ (соответственно $(x, y) = \overline{(y, x)}$);

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ (соответственно $\lambda \in \mathbf{C}$);

4) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.

б) H полно относительно метрики $\rho(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{(x-y, x-y)}$.

в) H является бесконечномерным пространством, то есть для любого натурального числа n в H найдется n линейно независимых элементов.

Два элемента $x, y \in H$ называются ортогональными (в этом случае записывают $x \perp y$), если $(x,y) = 0$. Элемент x называется ортогональным множеству $M \subset H$, если x ортогонален любому элементу $y \in M$. В этом случае записывают $x \perp M$. Множество всех элементов пространства H, ортогональных множеству M, обозначается через $M^{\perp}$.

Утверждение 3. *Если $x \in H$ и L — замкнутое подпространство пространства H, то $x = y + z$ для некоторых $y \in L$, $z \perp L$. Указанное разложение единственно.*

Система $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ элементов пространства H называется *ортонормальной*, если $(e_n, e_n) = 1$ и $(e_n, e_m) = 0$ при $n \neq m$.

Бесконечная система элементов линейного пространства называется *линейно независимой*, если любая конечная подсистема этой системы линейно независима.

Любую счетную линейно независимую систему $h_1, \ldots, h_n, \ldots$ можно превратить в ортонормальную с помощью процесса ортогонализации Шмидта.

Полагаем $e_1 = h_1/||h_1||$, $g_2 = h_2 - (h_2, e_1)e_1$. Тогда $g_2 \perp e_1$ и $g_2 \neq 0$ в силу линейной независимости h_1 и h_2. Полагаем $e_2 = g_2/||g_2||$. Пусть $e_1, \ldots, e_{n-1}$ уже построены. Возьмем $g_n = h_n - \sum_{i=1}^{n-1}(h_n, e_i)e_i$. Тогда $g_n \neq 0$ и g_n ортогонален $e_1, \ldots, e_{n-1}$. Полагаем $e_n = g_n/||g_n||$ и т.д.

Утверждение 4. *Всякое вещественное (соответственно комплексное) сепарабельное гильбертово пространство изометрично и изоморфно вещественному (соответственно комплексному) пространству l_2 и следовательно все вещественные (соответственно комплексные) сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Примеры банаховых пространств.

1) Пространство $C(X)$ непрерывных функций $f(x)$, заданных на множестве X с нормой $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

2) Пространство $L_p[a,b]$ $(p > 1)$ классов эквивалентности измеримых функций $f(x)$ на $[a,b]$, для которых $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$, с нормой $||f|| = (\int_a^b |f(x)|^p dx)^{1/p}$. Вещественное (соответственно комплексное) пространство $L_2[a,b]$, снабженное скалярным произведением $(f,g) = \int_{[a,b]} f(x)g(x)dx$ (соответственно $(f,g) = \int_{[a,b]} f(x)\overline{g(x)}dx$), является гильбертовым.

3) Пространство l_p $(p > 1)$ последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, с нормой $||x|| = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p}$. Вещественное (соответственно комплексное) пространство l_2, снабженное скалярным произведением $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ (соответственно $(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$), является гильбертовым.

7.1. Доказать, что всякое конечномерное линейное подпространство в ЛНП замкнуто.

Решение. Пусть L — линейное подпространство размерности n в ЛНП X. Покажем индукцией по n, что L замкнуто.

1. Пусть $n = 1$, $L = \mathcal{L}in(e_1)$, x — предельная точка L, $\{x_k\}$ — последовательность элементов из L, сходящаяся к x, $x_k = \alpha_k e_1$. Так как

$$||x_k|| = |\alpha_k| \cdot ||e_1|| \leq ||x|| + ||x_k - x||,$$

то последовательность $\{\alpha_k\}$ ограничена. Значит существует сходящаяся подпоследовательность $\{\alpha_{k_l}\}$, $\alpha = \lim_{l\to\infty} \alpha_{k_l}$. Таким образом

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{l\to\infty} x_{k_l} = \alpha e_1 \in L.$$

2. Предположим что утверждение индукции справедливо, если $n < N$. Докажем замкнутость L при $n = N$. Пусть $e_1, \dots e_N$ — базис L, $x \in X$ — предельная точка для L, $\{x_k\}$ — последовательность элементов из L, сходящаяся к x, $x_k = \alpha_k^1 e_1 + \dots + \alpha_k^N e_N$.

а) Покажем сначала, что последовательность $\{\alpha_k^N\}$ ограничена. Действительно, если это не так, то существует подпоследовательность $\{\alpha_{k_l}^N\}$ такая, что $\lim_{l\to\infty} \alpha_{k_l}^N = \infty$. Тогда $\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\alpha_{k_l}^N} x_{k_l} = 0$, то есть

$$\lim_{l\to\infty} \Big(\frac{\alpha_{k_l}^1}{\alpha_{k_l}^N} e_1 + \dots + \frac{1}{\alpha_{k_l}^N} \alpha_{k_l}^{N-1} e_{N-1}\Big) = -e_N.$$

Но тогда, по предположению индукции, $e_N \in \mathcal{L}in(e_1, \dots, e_{N-1})$, что противоречит линейной независимости векторов $e_1, \dots, e_N$.

б) Так как последовательность $\{\alpha_k^N\}$ ограничена, то существует сходящаяся подпоследовательность $\{\alpha_{k_l}^N\}$, $\lim_{l\to\infty} \alpha_{k_l}^N = \alpha$. Отсюда

$$\lim_{l\to\infty} (\alpha_{k_l}^1 e_1 + \dots + \alpha_{k_l}^{N-1} e_{N-1}) = x - \alpha e_N.$$

По предположению индукции $x - \alpha e_N \in \mathcal{L}in(e_1, \dots, e_{N-1})$, поэтому $x \in L$.

7.2. Привести пример линейного многообразия, не являющегося замкнутым.

Решение. Пусть $L \subset C[0,1]$ — пространство всех многочленов. Тогда замыкание пространства L совпадает со всем $C[0,1]$.

7.3. Рассмотрим пространство функций $f(x)$, имеющих непрерывные производные до k-го порядка включительно на отрезке $[a,b]$. Введем две нормы, полагая

$$||f||_1 = \sum_{i=0}^{k} \max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|, ||f||_2 = \max_{i=0,1,\dots,k} \{\max_{x\in[a,b]} |f^{(i)}(x)|\}.$$

Будут ли эти нормы эквивалентными?

Решение. Да, так как $||f||_2 \le ||f||_1 \le (k+1)||f||_2$.

7.4. На множестве непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ введем две нормы, полагая $||f||_1 = \max_{x\in[a,b]}|f(x)|$, $||f_2|| = \max_{x\in[a,b]}|f(x)| + \max_{x\in[a,b]}|f'(x)|$. Будут ли эти нормы эквивалентными?

Решение. Нет. Например для последовательности $f_n(x) = \frac{1}{n}(\frac{x-a}{b-a})^n$ имеем $\lim_{n\to\infty}||f_n||_1 = 0$, но $\lim_{n\to\infty}||f_n||_2 = 1/(b-a) \ne 0$.

7.5. Пусть B — банахово пространство, $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \ldots$ — последовательность вложенных замкнутых шаров. Доказать, что она имеет непустое пересечение.[1]

Решение. Пусть x_k и r_k — соответственно центр и радиус шара B_k и $i > j$. Если $x_i = x_j$, то $r_i \le r_j$. Если $x_i \ne x_j$, то $x_i + \frac{r_i}{||x_i - x_j||}(x_i - x_j) \in B_i$, значит $||x_i - x_j|| + r_i \le r_j$. Поэтому последовательность r_i невозрастающая и существует $r = \lim_{i\to\infty} r_i$. Если $r = 0$, то задача следует из утверждения 2. Иначе нужно применить утверждение 2 к последовательности $\{B_i'\}$ шаров с центрами в точках x_i и радиусами $r_i - r$.

7.6. Привести пример последовательности вложенных замкнутых ограниченных выпуклых множеств в банаховом пространстве, имеющих пустое пересечение.

Решение. В $C[0,1]$ рассмотрим последовательность множеств M_n, $M_n = \{f(x) \in C[0,1] : |f(x)| \le 1, f(1) = f(1/2) = \cdots = f(1/n) = 1, f(0) = 0\}$. Она удовлетворяет условию задачи. Если $f \in \cap_{i=1}^{\infty} M_i$, то $f(0) = 0$, но $f(1/n) = 1$ для натуральных n, что противоречит непрерывности f.

7.7. Рассмотрим пространство $C^k[0,1]$ непрерывных функций, имеющих непрерывные производные до k-го порядка включительно. Введем норму

$$(*) \qquad ||f|| = \max_{i=0,1,\ldots,k}\{\max_{x\in[0,1]}|f^{(i)}(x)|\}.$$

Показать, что $C^k[0,1]$ с введенной нормой — банахово пространство.

Решение. Пусть $\{f_n(x)\}$ — фундаментальная последовательность в $C^k[0,1]$ с нормой $(*)$. В силу критерия Коши равномерной сходимости, для любого $x \in [0,1]$ существует $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$; последовательности $\{f_n(x)\}$, $\{f_n'(x)\}$, $\ldots$, $\{f_n^{(k)}(x)\}$ сходятся равномерно на отрезке $[0,1]$. По теореме о дифференцируемости функциональной последовательности, функция $f(x) \in C^k[0,1]$, причем при $l = 0,1,\ldots k$ последовательности $\{f_n^{(l)}(x)\}$ сходятся равномерно к $f^{(l)}(x)$ на отрезке $[0,1]$, а значит $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по норме $(*)$.

7.8. Доказать, что пространство l_∞ ограниченных последовательностей $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ с нормой $||x|| = \sup_k |x_k|$ является банаховым пространством.

Решение. Пусть последовательность $f_j = (x_{1j}, \ldots, x_{nj}, \ldots)$ фундаментальна в l_∞. Тогда для каждого натурального n числовая последовательность $\{x_{nj}\}$ является фундаментальной, поэтому существует $x_n = \lim_{j\to\infty} x_{nj}$. Положим $f = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Из фундаментальности $\{f_j\}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$

[1] В метрическом пространстве данное утверждение неверно (см. задачу 5.5).

существует $J(\varepsilon)$ такой, что $|x_{nj} - x_{ni}| < \varepsilon$ для любых $i, j \geq J$ и для любого n. Устремив i к бесконечности, получаем $|x_{nj} - x_n| \leq \varepsilon$, значит $f \in l_\infty$ и $||f_j - f|| < 2\varepsilon$ при $j \geq J$, то есть f_j сходится к f.

7.9. Пусть X — пространство функций $f(x)$, определенных и непрерывных вместе с производными до l-го порядка включительно на отрезке $[a, b]$, снабженное нормой

$$||f(x)|| = (\int_a^b |f(x)|^p dx + \sum_{k=1}^{l} \int_a^b |f^{(k)}(x)|^p dx)^{1/p},$$

где $p > 1$. Будет ли пространство X с введенной нормой банаховым?

Решение. Нет, так как X не будет полным. Мы разберем случай $[a, b] = [-1, 1]$. (Случай произвольного отрезка сводится к данному случаю линейным преобразованием переменной x.)

Рассмотрим последовательность функций $\{\phi_n(x)\}$ из пространства X, таких, что

$$(*) \qquad \phi_n(0) = \phi_n'(0) = \cdots = \phi_n^{(l-1)}(0) = 0, \phi_n^{(l)}(x) = \begin{cases} nx & , |x| \leq 1/n \\ 1 & , x \in [1/n, 1] \\ -1 & , x \in [-1, -1/n] \end{cases}$$

Мы покажем, что эта последовательность функций является фундаментальной, однако она не сходится ни к какой функции из пространства X. Обозначим $f_{nq}(x) = \phi_{n+q}(x) - \phi_n(x)$, $n > 1$. Тогда $0 \leq |f_{nq}^{(l)}(x)| \leq 1$ и $f_{nq}^{(l)}(x) = 0$ при $|x| \in [1/n, 1]$. Применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $f_{nq}^{(j)}(x)$, $0 \leq j < l$, получаем, учитывая $(*)$, $f_{nq}^{(j)}(x) = \frac{f_{nq}^{(l)}(\xi)}{(l-j)!} x^{l-j}$, где $x \in [-1/n, 1/n]$, $\xi \in [-1/n, 1/n]$, поэтому

$$(**) \qquad |f_{nq}^{(j)}(x)| \leq 1/n^{l-j}, 0 \leq j \leq l-1, x \in [-1/n, 1/n].$$

Так как $f_{nq}^{(l)}(x) = 0$ на отрезке $[1/n, 1]$, то при $x \in [1/n, 1]$ имеем

$$f_{nq}^{(l-1)}(x) = f_{nq}^{(l-1)}(1/n),$$

$$f_{nq}^{(j)}(x) = f_{nq}^{(j)}(1/n) + f_{nq}^{(j+1)}(1/n)(x - 1/n) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(l-j-1)!} f_{nq}^{(l-1)}(1/n)(x - 1/n)^{l-j-1}, 0 \leq j \leq l-2.$$

Учитывая $(**)$, получаем $|f_{nq}^{(j)}(x)| \leq 1/n^{l-j} + 1/n^{l-j-1} + ... + 1/n \leq 2/n$ при $0 \leq j \leq l-1$ и $x \in [1/n, 1]$. Аналогично $|f_{nq}^{(j)}(x)| \leq 2/n$ при $x \in [-1, -1/n]$ и $0 \leq j \leq l-1$. Таким образом $|f_{nq}^{(k)}(x)| \leq 2/n$ при $x \in [-1, 1]$ и $k = 0, 1, \ldots, l-1$.

Оценим теперь интегралы: $\int_{-1}^1 |f_{nq}^{(l)}(x)|^p dx = 2\int_0^{1/n} |f_{nq}^{(l)}(x)|^p dx \leq 2/n$, а при $0 \leq k \leq l-1$, получаем $\int_{-1}^1 |f_{nq}^{(k)}(x)|^p dx = 2\int_0^1 |f_{nq}^{(k)}(x)|^p dx \leq 2^{p+1}/n^p$. Значит $||f_{nq}(x)|| \leq (l2^{p+1}/n^p + 2/n)^{1/p} < \varepsilon$ для достаточно больших n и любых натуральных q, что доказывает фундаментальность последовательности $\{\phi_n(x)\}$.

Допустим теперь, что последовательность $\{\phi_n(x)\}$ сходится по норме к некоторой функции $\phi(x) \in X$. Так как для любого $\delta \in (0,1)$ начиная с некоторого номера $n_0(x)$ справедливо равенство $\phi_n^{(l)}(x) = sign(x)$ при $|x| > \delta$, получаем, что $\phi^{(l)}(x) = sign(x)$ при $x \neq 0$, что противоречит непрерывности $\phi^{(l)}(x)$.

7.10. Пусть G — ограниченная выпуклая область на плоскости. Рассмотрим пространство функций $f(x,y)$, определенных и непрерывных вместе с производными до l-го порядка включительно в некоторой области, содержащей в себе $\overline{G}$. На этом пространстве введем норму, полагая

$$||f||_G = (\iint_G |f(x,y)|^p dxdy + \sum_{1 \le l_1 + l_2 \le l} \iint_G |\frac{\partial^l f}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2}}|^p dxdy)^{1/p},$$

где $p > 1$. Данное пространство с введенной нормой обозначим $\tilde{W}_p^{(l)}$. Будет ли оно банаховым?

Решение. Нет, не будет. Мы можем считать, что $G \subset [-1,1] \times [-1,1]$ и $0 \in G \setminus \partial G$. (Произвольный случай сводится к данному сдвигом и растяжением области G.) Рассмотрим последовательность $\{f_n(x,y)\}$, $f_n(x,y) = \phi_n(x)$, где $\{\phi_n(x)\}$ — последовательность из предыдущей задачи. Тогда $||f_n(x,y) - f_{n+q}(x,y)||_G \le ||\phi_n(x) - \phi_{n+q}(x)|| = (\int_{-1}^1 |\phi_n(x) - \phi_{n+q}(x)|^p dx + \sum_{k=1}^l \int_{-1}^1 |\phi_n^{(k)}(x) - \phi_{n+q}^{k)}(x)|^p dx)^{1/p}$, и, аналогично предыдущей задаче, мы получаем, что последовательность $\{f_n(x,y)\}$ фундаментальна, но не сходится по норме ни к какому элементу пространства $\tilde{W}_p^{(l)}$.

7.11. Рассмотрим пространство X функций $f(x)$ непрерывных на числовой прямой, каждая из которых равна нулю вне некоторого отрезка. Введем норму $||f|| = \max|f(x)|$. Будет ли X банаховым?

Решение. Нет. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\} \subset X$:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} \sin(\pi x), |x| \le 2n \\ 0, |x| > 2n. \end{cases}$$

Последовательность $f_n(x)$ фундаментальна, так как $\max|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \frac{1}{n^2+1}$. Но предельная функция $f(x) = \frac{1}{x^2+1}\sin(\pi x)$ не принадлежит X.

7.12. Рассмотрим на прямой R пространство X функций $x(t)$, отличных от нуля не более чем в счетном числе точек и таких, что $\sum_t x^2(t) < \infty$. Скалярное произведение зададим по формуле $(x,y) = \sum_t x(t)y(t)$. Будет ли это пространство гильбертовым?

Решение. Да, X будет несепарабельным гильбертовым пространством.[2] Очевидно, что пространство X евклидово и бесконечномерно.

Докажем, что X — банахово пространство. Пусть $\{x_n(t)\}$ — фундаментальная последовательность функций из X, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует N, такое что

$$(*) \qquad ||x_n - x_m||^2 = \sum_t (x_n(t) - x_m(t))^2 < \varepsilon^2 \text{ при } n, m \ge N.$$

[2]Несепарабельность пространства X будет доказана в задаче 8.6.

Тогда $|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon$ для любого t, значит последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно на $\mathbf{R}$ к некоторой функции $x(t)$. Покажем, что $x(t)$ отлична от нуля в не более чем счетном числе точек. Действительно, пусть $T = \{t : x(t) \neq 0\}$, $T_k = \{t : |x(t)| > 1/k\}$. Тогда $T = \cup_k T_k$. Если T несчетно, то для некоторого k множество T_k несчетно. В силу равномерной сходимости последовательности $\{x_n(t)\}$, имеем $|x_n(t)| > \frac{1}{2k}$ при $t \in T_k$ и достаточно больших n, что противоречит несчетности T_k. Таким образом $x(t)$ обращается в нуль вне счетного множества точек $\{t_l\}$.

Согласно (*), последовательности $x_n' = (x_n(t_1), \ldots, x_n(t_k), \ldots)$ принадлежат l_2, и сами образуют фундаментальную последовательность $\{x_n'\}$. В силу полноты l_2, и поскольку из сходимости в l_2 следует сходимость по каждой из координат, получаем, что последовательность $(x(t_1), \ldots, x(t_k), \ldots)$ принадлежит l_2, поэтому $x(t) \in X$.

Рассматривая в $(*)$ такие t, для которых $x_n(t)$ или $x(t)$ отличны от нуля и устремляя m к бесконечности, получаем $||x_n(t) - x(t)|| < \varepsilon$, поэтому $x(t)$ действительно является пределом последовательности $x_n(t)$ относительно нормы пространства X.

7.13. Доказать, что сходимость в каждой точке отрезка $[a, b]$ в пространстве функций, ограниченных на отрезке $[a, b]$ нельзя задать нормой.

Решение. Предположим противное. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, x \in (a, a + \frac{b-a}{n}), \\ 0, x \in [a, b] \setminus (a, \frac{b-a}{n}). \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится к нулю в каждой точке отрезка $[a, b]$. Более того, для любой числовой последовательности $\{c_n\}$, последовательность $\{c_n f_n\}$ сходится к нулю в каждой точке отрезка $[a, b]$. В частности, последовательность $\{g_n\}$, $g_n = \frac{f_n}{||f_n||}$ сходится к нулю в каждой точке отрезка $[a, b]$, хотя $||g_n|| = 1$. Противоречие.

7.14. Пусть X — нормированное линейное пространство. Доказать, что на X можно ввести скалярное произведение (x, y), согласованное с нормой этого пространства (то есть $||x|| = \sqrt{(x, x)}$) тогда и только тогда, когда для любых элементов $x, y \in X$ выполнено тождество параллелограмма

(*)
$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Решение. Если на X определено скалярное произведение, согласованное с нормой, то тождество параллелограмма следует из свойств скалярного произведения.

Допустим теперь, что на X выполнено тождество параллелограмма. Покажем, что в случае вещественного пространства скалярное произведение задается формулой

(**)
$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2)$$

(случай комплексного пространства с

$$(x, y) = \frac{1}{4}(||x + y||^2 - ||x - y||^2) - \frac{i}{4}(||x + iy||^2 - ||x - iy||^2)$$

рассматривается аналогично.)

В силу (**), $(x, x) = ||x||^2$ и $(x, y) = (y, x)$, поэтому достаточно показать справедливость аксиом 3) и 4) скалярного произведения. Из тождества параллелограмма следует:

$$||a + c - b||^2 = 2||a||^2 + 2||c - b||^2 - ||a - c + b||^2, \tag{1}$$

$$||a + c + b||^2 = 2||a||^2 + 2||c + b||^2 - ||a - c - b||^2. \tag{2}$$

Вычитая (1) из (2) и используя (**), получаем

$$(a + c, b) - (a - c, b) = 2(c, b). \tag{3}$$

Подставив в (3) $b = y$, $a = x/2+z$, $c = x/2$, получаем $(x+z, y) = 2(x/2, y)+(z, y)$. Положив в последнем равенстве $z = 0$, получим

$$(x, y) = 2(x/2, y), \tag{4}$$

отсюда для любого z имеем $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$, поэтому выполнена аксиома 4). Кроме того, в силу (4), $(1/2^k x, y) = 1/2^k(x, y)$ для любого целого k. Используя теперь аксиому 4), получаем, что аксиома 3) верна для $\lambda = p/2^k$, где p — целое число. В силу непрерывности нормы и равенства (**), скалярное произведение является непрерывной функцией. Так как любое вещественное число можно приблизить дробями вида $p/2^k$, то аксиома 3) справедлива для любого λ.

7.15. Показать, что:

а) в пространстве $C[0, 1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

б) в пространстве l_1 нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

Решение. а) Рассмотрим функции $x(t) = |t - 1/2|$, $y(t) = t - 1/2$. Тогда $||x|| = ||y|| = 1/2$, $||x + y|| = ||x - y|| = 1$, поэтому не выполняется тождество параллелограмма из задачи 7.14.

б) Тождество параллелограмма не выполняется для $x = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$, $y = \{0, 1, 0, 0, \dots\}$.

7.16. Доказать, что для произвольного множества M гильбертова пространства H:

а) $M^\perp$ является замкнутым подпространством и $M \subset (M^\perp)^\perp$.

б) Равенство $M = (M^\perp)^\perp$ выполняется тогда и только тогда, когда M — замкнутое подпространство пространства H.

Решение. а) $M^\perp$ является линейным замкнутым подпространством в силу линейности и непрерывности скалярного произведения по каждому из своих аргументов.Кроме того, если $z \in M$, то $z \perp M^\perp$, отсюда $M \subset (M^\perp)^\perp$.

б) В силу а) множество $(M^{\perp})^{\perp}$ является замкнутым подпространством, поэтому достаточно доказать равенство $M = (M^{\perp})^{\perp}$ для случая, когда M — замкнутое подпространство. Допустим, что $M \neq (M^{\perp})^{\perp}$. Тогда существует ненулевой элемент $x \in (M^{\perp})^{\perp} \setminus M$. В силу утверждения 3 можно записать $x = y + z$, где $y \in M$, $z \in M^{\perp}$, $z \neq 0$. Умножая это равенство скалярно на z, получаем $0 = (z, z)$, что противоречит $z \neq 0$.

7.17. Найти ортогональное дополнение к подпространству M пространства $L_2[0,1]$, если:

а) $M = \{x \in L_2[0,1], x(t) = 0$ почти всюду на отрезке $[0,1/2]\}$,

б) $M = \{x \in L_2[0,1], \int_0^1 x(t)dt = 0\}$.

Решение. а) Покажем, что $y(t) \in M^{\perp}$ тогда и только тогда, когда $y(t) = 0$ почти всюду на отрезке $[1/2,1]$. Действительно, если $y(t) = 0$ почти всюду на $[1/2,1]$, то $x(t)y(t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$, поэтому $(x(t), y(t)) = 0$.

Обратно, пусть $y(t) \in M^{\perp}$. Рассмотрим

$$x(t) = \begin{cases} 0, t \in [0,1/2] \\ y(t), t \in (1/2,1] \end{cases}$$

Тогда $x(t) \in M$, $0 = (x(t), y(t)) = \int_0^1 x(t)y(t)dt = \int_{1/2}^1 y^2(t)dt$. Поэтому $y(t) = 0$ почти всюду на отрезке $[1/2,1]$.

б) Обозначим через N множество функций $y(t) \in L_2[0,1]$ постоянных почти всюду на $[0,1]$. Тогда $M = N^{\perp}$. Так как N является замкнутым подпространством, то $M^{\perp} = (N^{\perp})^{\perp} = N$.

7.18. Рассмотрим линейно независимую систему степеней $1, t, t^2, \ldots$ в пространстве $L_2[-1,1]$. Ортогонализация этой системы процессом Шмидта дает многочлены Лежандра $L_n(t)$. Найти $L_n(t)$ при $n = 1,2,3$.

Решение. Применяя процесс ортогонализации, последовательно получаем $h_1 = 1$, $||h_1||^2 = \int_{-1}^1 dt = 2$, $e_1 = 1/\sqrt{2}$, $g_2 = t - (t, e_1)e_1 = t - 1/2\int_{-1}^1 tdt = t$, $||g_2||^2 = \int_{-1}^1 t^2dt = 2/3$, $e_2 = g_2/||g_2|| = \sqrt{3/2}t$, $g_3 = t^2 - (t^2, e_1)e_1 - (t^2, e_2)e_2 = t^2 - 1/2\int_{-1}^1 t^2dt = t^2 - 1/3$. $||g_3||^2 = 8/45$, $e_3 = g_3/||g_3|| = \frac{\sqrt{10}}{4}(3t^2 - 1)$.

7.19. Пусть X и Y — банаховы пространства с нормами $||x||_X$ и $||y||_Y$ соответственно. Определим в пространстве $X \times Y$ функцию $||(x,y)|| = ||x||_X + ||y||_Y$. Показать, что эта функция является нормой в $X \times Y$ и что пространство $X \times Y$, снабженное этой нормой является банаховым.

Решение. Аксиомы нормы вытекают из соответствующих аксиом для норм в пространствах X и Y. Проверим полноту пространства $X \times Y$. Пусть $\{(x_n, y_n)\}$ — фундаментальная последовательность в $X \times Y$. Тогда $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — фундаментальные последовательности в пространствах X и Y соответственно. Так как пространства X и Y банаховы, то существуют $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} ||(x_n, y_n) - (x,y)|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n - x||_X + \lim_{n\to\infty} ||y_n - y||_Y = 0,$$

то есть $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x,y) \in X \times Y$.

ГЛАВА VIII. КОМПАКТНОСТЬ И СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ.

Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное подмножество.

Примеры сепарабельных пространств.

1. Пространство $\mathbf{R}^n$ с различными метриками (см. примеры 2, 7 главы 5). Счетным всюду плотным подмножеством в $\mathbf{R}^n$ является, например, множество векторов с рациональными координатами.

2. Пространства f, c, c_0, l_p, $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$, $C[a,b]$, $C^n[a,b]$, $C^\infty[a,b]$. Сепарабельность этих пространств следует из задач 8.3, 8.4.

Примеры несепарабельных пространств. Пространства $B[a,b]$, $H^\alpha[a,b]$, l_∞, $L_\infty[a,b]$ несепарабельны (см. задачу 8.5).

Топологическое пространство называется *компактным*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Множество $M \subset X$ называется *относительно компактным*, если $\overline{M}$ компактно. Компактное топологическое пространство, в котором выполнена вторая (хаусдорфова) аксиома отделимости называется *компактом.*

Требование компактности весьма сильно и выделяет более узкий класс, чем полные и сепарабельные (см. задачу 8).

Подмножество A метрического пространства (M,ρ) называется *ε-сетью* для подмножества $E \subset M$, если для любого $x \in E$ существует $z \in A$ такое, что $\rho(z,x) < \varepsilon$. Справедлива

Теорема Хаусдорфа. *Для того, чтобы подмножество A метрического пространства (M,ρ) было относительно компактным, необходимо (а если (M,ρ) полно, то и достаточно), чтобы для любого $\varepsilon > 0$ в M существовала конечная ε-сеть для A.*

Утверждение 1. *Образ компакта при непрерывном отображении является компактом.*

Утверждение 2. *Если X — метрическое пространство, то $M \subset X$ компактно тогда и только тогда, когда из всякой последовательности $\{x_n\}$ элементов из M можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из M.*

Критерии компактности множеств в некоторых метрических пространствах.

1. Относительная компактность в $C[a,b]$. Семейство F функций $f \in C[a,b]$ называется равномерно ограниченным, если существует число K такое, что $|f(x)| \le K$ для всех $f \in F$ и $x \in [a,b]$. Семейство F функций $f \in C[a,b]$ называется равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует

$\delta > 0$ такое, что $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$ при всех $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $|x_1-x_2| < \delta$, и для всех $f \in F$.

Теорема Арцела. *Семейство F функций $f \in C[a,b]$ относительно компактно в $C[a,b]$ если и только если оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

2. Компактность в l_p, $1 \le p < \infty$.

Утверждение 3. *Множество $M \in l_p$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $x \in M$, $x = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ верно*

$$\sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon^p. \tag{1}$$

Задачи

8.1. Пусть метрическое пространство (M_0, ρ) содержится в сепарабельном метрическом пространстве (M, ρ). Докажите, что пространство (M_0, ρ) сепарабельно.

Решение. Пусть $\{x_k\}$ — счетное всюду плотное в M множество. Для любых натуральных k, n выберем $y_{kn} \in M_0$, $\rho(x_k, y_{kn}) < \rho(x_k, M_0) + 1/n$. Множество $\{y_{kn}\}$ счетно. Покажем, что оно всюду плотно в M_0. Рассмотрим $x \in M_0$ и любое $\varepsilon > 0$. Существует $x_k : \rho(x, x_k) < \varepsilon/3$. Возьмем $n > 3/\varepsilon$. Тогда

$$\rho(x, y_{kn}) \le \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y_{kn}) < 2\varepsilon/3 + \rho(x_k, M_0) \le 2\varepsilon/3 + \rho(x_k, x) < \varepsilon.$$

8.2. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, в котором существует несчетное множество $\{x_\alpha\}$ и число $c > 0$ такие, что $\rho(x_\alpha, x_\beta) \ge c$ при $\alpha \ne \beta$. Покажите, что пространство (M, ρ) несепарабельно.

Решение. Допустим, что (M, ρ) сепарабельно и $\{y_k\}$ — счетное всюду плотное в M множество. Тогда $M = \cup_{n=1}^{\infty} B_{y_n, c/4}$. Так как множество $\{x_\alpha\}$ несчетно, то существуют две различные точки x_α, x_β, которые попадут в один и тот же шар, скажем $B_{y_k, c/4}$. Но тогда $\rho(x_\alpha, x_\beta) \le \rho(x_\alpha, y_k) + \rho(y_k, x_\beta) \le c/2$, что противоречит условию.

8.3. Пусть $F = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)\}$ — множество финитных последовательностей (то есть для любого $\xi \in F$ существует N такое, что $\xi_n = 0$ при $n > N$) с рациональными координатами. Покажите, что:

а) множество F счетно;

б) множество F всюду плотно в пространствах f, c_0, l_p, s.[1]

в) Пусть $G = \{g = r(1, \dots 1, \dots) \,|\, r \in \mathbb{Q}\}$ — множество последовательностей с одинаковыми рациональными координатами. Покажите, что множество $M = \{f + g \,|\, f \in F, g \in G\}$ счетно и всюду плотно в c.

---

[1] Пространство s определено в задаче 5.3.

Решение. а) $F = \cup_{j=1}^{\infty} F_j$, $F_j = \{\xi \in F : \xi_n = 0, n > j\}$. Каждое из множеств F_j счетно, так как является объединением конечного числа счетных множеств. Поэтому и F счетно.

б) Пусть $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in f$. Тогда существует n_0 такое что $y_n = 0$, $n > n_0$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $r_1, \dots, r_{n_0} \in \mathbf{Q}$ такие, что $|y_i - r_i| < \varepsilon$ при $1 \leq i \leq n_0$. Отсюда $\phi = (r_1, \dots, r_{n_0}, 0 \dots) \in F$ и $\rho(y, \phi) < \varepsilon$.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in c_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такой, что $|y_n| < \varepsilon/2$ при $n \geq n_0$. Так как $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{n_0}, 0, 0 \dots) \in f$, то существует $\phi \in F$, $\rho(\tilde{y}, \phi) < \varepsilon/2$. Отсюда $\rho(y, \phi) < \varepsilon$.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in l_p$, $1 \leq p < \infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такой, что $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |y_n|^p < (\varepsilon/2)^p$. Для $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{n_0}, 0, 0 \dots)$ получаем $\rho(\tilde{y}, y) < \varepsilon/2$. Выберем $r_1, \dots, r_{n_0} \in \mathbf{Q}$ такие, что $|y_i - r_i|^p < (\varepsilon/2)^p/n_0$ при $1 \leq i \leq n_0$. Поэтому для $\phi = (r_1, \dots, r_{n_0}, 0, \dots) \in F$ имеем $\rho(\tilde{y}, \phi) < \varepsilon/2$, значит $\rho(y, \phi) < \varepsilon$.

Пусть $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in s$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такой, что $1/2^{n_0} < \varepsilon/2$. Для $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_{n_0}, 0, 0 \dots)$ получаем $\rho(y, \tilde{y}) \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 1/2^n < \varepsilon/2$. Выберем $r_1, \dots, r_{n_0} \in \mathbf{Q}$ такие, что $|y_i - r_i| < \varepsilon/2$ при $1 \leq i \leq n_0$. Отсюда для $\phi = (r_1, \dots, r_{n_0}, 0 \dots) \in F$ имеем $\rho(\tilde{y}, \phi) < \sum_{i=1}^{n_0} 2^{-i}\varepsilon/2 < \varepsilon/2$. Значит $\rho(y, \phi) < \varepsilon$.

в) Так как G счетно, то и $M = \cup_{g \in G}\{F_g\}$ счетно ($F_g = \{f + g\}, f \in F$). Пусть $y = (y_1, \dots, y_n, \dots) \in c$, $a = \lim_{n \to \infty} y_n$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует n_0 такой, что $|y_n - a| < \varepsilon/2$ при $n \geq n_0$). Возьмем $r \in \mathbf{Q} : |a - r| < \varepsilon/2$. Тогда $|y_n - r| < \varepsilon$, $n \geq n_0$. Выберем $r_1, \dots, r_{n_0} \in \mathbf{Q}$ такие, что $|y_i - r_i| < \varepsilon$ при $1 \leq i \leq n_0$. Отсюда $\phi = (r_1, \dots, r_{n_0}, r, r \dots) \in M$, $\rho(y, \phi) < \varepsilon$.

8.4. Пусть Π — множество многочленов с рациональными коэффициентами. Показать, что Π счетно и всюду плотно в пространствах $C[a, b]$, $C^n[a, b], C^{\infty}[a, b]$, а множество классов эквивалентности элементов из Π всюду плотно в $L_p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$.

Решение. Счетность Π доказывается аналогично задаче 8.3. Далее в этой задаче мы будем считать, что $\rho(x, y)$ — метрика в $C[a, b]$, $\rho_n(x, y)$ — метрика в $C^n[a, b]$, $\rho_{\infty}(x, y)$ — метрика в $C^{\infty}[a, b]$, $\rho_p(x, y)$ — метрика в $L_p[a, b]$.

Рассмотрим $x(t) \in C[a, b]$ и любое $\varepsilon > 0$. По теореме Вейерштрасса существует многочлен $Q(t)$: $\rho(Q, x) < \varepsilon/2$. Но для $Q(t)$ найдется многочлен с рациональными коэффициентами $P(t) \in \Pi$ такой, что $\rho(P, Q) < \varepsilon/2$.

Рассмотрим теперь $x(t) \in C^n[a, b]$ и любое $\varepsilon > 0$. Так как $x^{(n)}(t) \in C[a, b]$, то существует $Q(t) \in \Pi$: $\rho(Q, x^{(n)}(t)) < \varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(1+(b-a)+\dots+(b-a)^n)}$. Существует многочлен $P(t)$, удовлетворяющий условиям

$$P(a) = x(a), P'(a) = x'(a), \dots P^{(n-1)}(a) = x^{(n-1)}(a), P^{(n)}(t) = Q(t).$$

По теореме Лагранжа для любого $t \in [a, b]$ существует $\xi \in (a, t)$: $P^{(n-1)}(t) - x^{(n-1)}(t) = (P^{(n)}(\xi) - x^{(n)}(\xi))(t - a) = (Q(\xi) - x^{(n)}(\xi))(t - a)$. Следовательно $\rho(x^{(n-1)}, P^{(n-1)}) < (b - a)\varepsilon_1$. Аналогично $\rho(x^{(n-2)}, P^{(n-2)}) < (b - a)^2\varepsilon_1, \dots$, $\rho(x, P) < (b-a)^n\varepsilon_1$. Поэтому $\rho_n(x, P) < \varepsilon_1(1+(b-a)+\dots+(b-a)^n) = \varepsilon/2$. Возьмем для $P(t)$ многочлен $R(t)$ с рациональными коэффициентами, $\rho_n(P, R) < \varepsilon/2$. Тогда $\rho_n(x, R) < \varepsilon$.

Рассмотрим $x(t) \in C^\infty[a,b]$ и любое $\varepsilon > 0$. По аналогии с пространством s возьмем $n : 1/2^n < \varepsilon/2$. Пусть $R \in \Pi$ — многочлен, такой что $\rho_n(R, x) < \varepsilon/2$. Тогда $\rho(P^{(k)}, x^{(k)}) < \varepsilon/2$, при $1 \leq k \leq n$, поэтому $\rho_\infty(P, x) < \sum_{k=1}^n \varepsilon/2^{k+1} + \sum_{k=n+1}^\infty 1/2^n < \varepsilon$.

Рассмотрим $x(t) \in L_p[a,b]$ и любое $\varepsilon > 0$. Так как множество непрерывных функций (точнее, их классов эквивалентности) всюду плотно в $L_p[a,b]$, то существует $f(t) \in C[a,b]$ такая, что $\rho_p(f, x) < \varepsilon/2$. Выберем $P \in \Pi$: $\rho(P, f) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)^{1/p}}$. Тогда $\rho_p(P, f) = (\int_a^b |P(t) - f(t)|^p dt)^{1/p} < \varepsilon/2$. Отсюда $\rho_p(x, P) < \varepsilon$.

8.5. Показать, что пространства l_∞, $B[a,b]$, $L_\infty[a,b]$, $H^\alpha[a,b]$ $(0 < \alpha \leq 1)$ несепарабельны. (Пространство $H^\alpha[a,b]$ определено в задаче 5.7.)

Решение. Воспользуемся задачей 8.2.

Для любого $z \in (0,1)$ существует последовательность $x_z = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$, являющаяся двоичной записью числа z. Множество $\{x_z\}$ несчетно и $\rho(x_{z_1}, x_{z_2}) = 1$ при $z_1 \neq z_2$. Поэтому l_∞ несепарабельно.

В пространстве $B[a,b]$ рассмотрим множество функций $x_z(t)$, где $z \in [a,b]$ и

$$x_z(t) = \begin{cases} 1, & t = z \\ 0, & t \in [a,b] \setminus z. \end{cases}$$

Это множество несчетно и $\rho(x_{z_1}, x_{z_2}) = 1$ при $z_1 \neq z_2$. Поэтому $B[a,b]$ несепарабельно. Аналогично доказывается несепарабельность $L_\infty[a,b]$.

В пространстве $H^\alpha[a,b]$ рассмотрим множество всех функций $x_z(t) = |t - z|^\alpha$, где $z \in [a,b]$. Пусть $z_1 \neq z_2$. Возьмем $t_1 = (z_1 + z_2)/2$, $t_2 = z_2$. Тогда $|x_{z_1}(t_1) - x_{z_2}(t_1) - (x_{z_1}(t_2) - x_{z_2}(t_2))| = |z_1 - z_2|^\alpha$. Так как $|t_1 - t_2| = |z_1 - z_2|/2$, то $\sup_{y_1, y_2 \in [a,b]} |x_{z_1}(y_1) - x_{z_2}(y_1) - (x_{z_1}(y_2) - x_{z_2}(y_2))|/|y_1 - y_2|^\alpha \geq 2^\alpha$. Поэтому $\rho(x_{z_1}, x_{z_2}) \geq 2^\alpha$ и, поскольку множество $\{x_z(t)\}$ несчетно, пространство $H^\alpha[a,b]$ несепарабельно.

8.6. Являются ли следующие пространства сепарабельными?

а) Множество непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ с интегральной метрикой $\rho(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$.

б) Множество всех иррациональных чисел отрезка $[a,b]$ с метрикой $\rho(x,y) = |x - y|$

в) Множество непрерывных и ограниченных на интервале (a,b) функций с метрикой $\rho(f,g) = \sup_{(a,b)} |f(x) - g(x)|$.

г) Пространство X, определенное в задаче 7.12.

Решение. а) Сепарабельность пространства доказывается аналогично сепарабельности $L_1[a,b]$ (см. задачу 8.4).

б) Пространство сепарабельно, так как является подпространством сепарабельного пространства $\mathbf{R}$.

в) Пространство несепарабельно. Действительно, рассмотрим например интервал $(0,1)$. Для каждой бесконечной последовательности $\alpha = \{\alpha_n\}$ из нулей и единиц существует функция $f_\alpha(x) \in C(0,1)$, такая что $|f_\alpha(x)| \leq 1$, $x \in (0,1)$ и $f_\alpha(\frac{1}{2^j}) = \alpha_j$. Тогда множество, состоящее из функций f_α несчетно и $\rho(f_\alpha, f_\beta) \geq 1$ при $\alpha \neq \beta$.

г) Покажем, что X несепарабельно. Рассмотрим множество Y функций $y(t) \in X$, каждая из которых равна единице в конечном числе точек и нулю вне этих точек. Тогда множество Y несчетно и

$$(**) \qquad ||y_1(t) - y_2(t)|| = \sqrt{\sum_t (y_1(t) - y_2(t))^2} \geq 1$$

для $y_1(t), y_2(t) \in Y$, $y_1(t) \neq y_2(t)$. Поэтому X несепарабельно согласно задаче 8.2.

8.7. Доказать, что каждое бесконечное подмножество компактного пространства имеет хотя бы одну предельную точку.

Решение. Допустим от противного, что существует бесконечное подмножество M компакта X, которое не имеет предельных точек. Тогда у любой точки $x \in X$ существует окрестность U_x, которая не содержит точек из $M \setminus x$. Так как $X = \cup_{x \in X} U_x$, то существует конечное покрытие $X = \cup_{k=1}^n U_{x_k}$. Но тогда $M = X \cap M \subset \cup_{k=1}^n x_k$, что противоречит бесконечности M.

8.8. Показать, что метрический компакт (M, ρ) является полным и сепарабельным пространством.

Решение. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в (M, ρ). Тогда существует подпоследовательность x_{nk}, сходящаяся к некоторому $x \in M$. Так как $\{x_n\}$ фундаментальна, то $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, что доказывает полноту (M, ρ).

Построим счетное всюду плотное множество $\{x_n\}$ в (M, ρ). На первом шаге выберем конечное подпокрытие $\cup_{k=1}^{n_1} B_{x_k, 1/2}$ множества M шарами радиуса $1/2$ с центрами в точках $x_1, \dots, x_{n_1}$. На втором шаге выберем конечное подпокрытие множества M шарами радиуса $1/4$ с центрами в точках $x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2}$. Далее, по индукции, на k-м шаге выберем конечное подпокрытие множества M шарами радиуса $1/2^k$ с центрами в точках $x_{n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_k}$. Полученное множество будет счетным и всюду плотным в (M, ρ).

8.9. Показать, что замкнутое подмножество компакта является компактом.

Решение. Пусть M — замкнутое подмножество компакта X. Тогда множество $U_0 = X \setminus M$ — открыто. Рассмотрим $\cup_\alpha U_\alpha$ — произвольное покрытие M открытыми множествами. Тогда $X = U_0 \cup (\cup_\alpha U_\alpha)$. Выберем конечное подпокрытие $X = U_0 \cup (\cup_{k=1}^n U_{\alpha_k})$. Тогда $M \in \cup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$.

8.10. Показать, что в пространстве $C[0,1]$ существует ограниченное замкнутое множество, не являющееся компактным.

Решение. Рассмотрим единичный шар $B = \{f \in C[0,1] : |f(x)| \leq 1, x \in [0,1]\}$. Он не является компактом, так как последовательность $\{x^n\} \subset B, n \in \mathbf{N}$ не имеет предельных точек в $C[0,1]$, поскольку любая ее подпоследовательность x^{n_k} сходится "поточечно" к разрывной функции.

8.11. Построить компактное множество M, имеющее счетное число предельных точек.

Решение. Рассмотрим $M = \{0\} \cup \{1/n + 1/m \,|\, n, m \in \mathbf{N}\}$. Тогда $\overline{M} = M$ и M — компакт как замкнутое и ограниченное подмножество прямой $\mathbf{R}$.

8.12. Привести пример ограниченного подмножества A мощности континуум метрического пространства (M, ρ) имеющего только

изолированные точки. Показать, что в сепарабельном метрическом пространстве такой пример невозможен.**

Решение. Например $A = \{x_z\} \subset l_\infty$ из задачи 8.5.

Допустим противное: пусть пространство (M, ρ) сепарабельно. Тогда (A, ρ) также сепарабельно (см. задачу 8.1). Пусть $\{y_n\} \in A$ — счетное всюду плотное множество. Так как A — множество мощности континуум, то существует $x \in A\backslash\{y_n\}$. Но тогда x является предельной точкой множества A — противоречие.

8.13. Пусть $E = \{x_n\} \subset \mathbf{R}$ — счетное множество и $\cup_{n=1}^{\infty} G_n$ — его открытое покрытие. Можно ли из этого покрытия выделить конечное подпокрытие множества E, если

1) $x_1 = 0,\ x_n = 1/2^{n-2},\ G_1 = (-\varepsilon, \varepsilon),\ G_n = (\frac{1-\varepsilon}{2^{n-2}}, \frac{1+\varepsilon}{2^{n-2}}),\ n = 2, 3, \ldots,$ $0 < \varepsilon < 1/2$;

2) $x_n = \frac{1}{2^{n-1}},\ G_n = (\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}),\ n \in \mathbf{N},\ 0 < \varepsilon < 1/2$;

3) $x_n = n,\ G_n = (n - \varepsilon, n + \varepsilon),\ n \in \mathbf{N},\ 0 < \varepsilon < 1/2$?

Построить какое-нибудь конечное подпокрытие, в случаях, когда оно существует.

Решение. В случае 1) множество E ограничено и замкнуто, поэтому оно является компактом. Пусть $N \in \mathbf{N}$ удовлетворяет неравенству $2^{N-1} > 1/\varepsilon$. Тогда $x_n \in G_1$ при $n > N$ и множество $\cup_{k=1}^{N} G_n$ является конечным подпокрытием множества E.

2) Предположим, что $E \in \cup_{k=1}^{K} G_{n_k}$. Тогда $d = \rho(0, E) > 0$ ($\rho(x, y) = |x - y|$). Но точка 0 является предельной для E, что противоречит $d > 0$.

3) Множество E неограничено, поэтому оно не может содержаться ни в каком конечном подпокрытии $\cup_{k=1}^{K} G_{n_k}$.

8.14. Показать, что если E_1, E_2 — компактные множества в метрическом пространстве (M, ρ), то существуют $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, такие что $\rho(x_1, x_2) = \rho(E_1, E_2)$.

Решение. По определению расстояния $\rho(E_1, E_2)$, существуют последовательности $\{x'_n\} \subset E_1$ и $\{x''_n\} \subset E_2$, такие что $\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, x''_n) = \rho(E_1, E_2)$. Так как множества E_1 и E_2 — компакты, то существуют подпоследовательности $\{x'_{nk}\}$ и $\{x''_{nk}\}$, сходящиеся соответственно к $x_1 \in E_1$ и $x_2 \in E_2$. В силу непрерывности метрики, $\rho(x_1, x_2) = \rho(E_1, E_2)$.

8.15. Доказать, что в бесконечномерном банаховом пространстве X замкнутый единичный шар $\overline{B}$ (а значит и любой замкнутый шар) не является компактом.

Решение. Предположим, от противного, что $\overline{B}$ — компакт. Рассмотрим покрытие шара $\overline{B}$ открытыми шарами радиуса $1/2$ с центрами во всех точках из $\overline{B}$ и выберем из него конечное подпокрытие такими шарами с центрами $x_1, \ldots, x_m$. Пусть $L \subset E$ — линейное подпространство, натянутое на $x_1, \ldots, x_m$. Тогда, по определению подпокрытия, имеем

$$(*) \qquad \overline{B} \subset L + 1/2\overline{B}$$

Подставляя в правую часть $L + 1/2\overline{B}$ вместо $\overline{B}$ и пользуясь тем, что L — линейное подпространство, получаем $\overline{B} \subset L + 1/4\overline{B}$. Повторив это рассуждение много раз, получим

$$\overline{B} \subset L + 2^{-n}\overline{B}.$$

Так как L конечномерно, то $\bigcap_{n=2}^{\infty}(L + 2^{-n}\overline{B}) = \overline{L} = L$. Отсюда $\overline{B} \subset L$, что противоречит бесконечномерности X.

8.16. Показать, что любое относительно компактное (а следовательно, и любое компактное) множество M в бесконечномерном банаховом пространстве X нигде не плотно в X.

Решение. Допустим, от противного, что множество M не является нигде не плотным. Тогда существует шар $B \subset \operatorname{int} M$, а значит $\overline{B} \in \overline{M}$. Но $\overline{M}$ — компакт, значит $\overline{B}$ — тоже компакт (см. задачу 8.9), что невозможно согласно задаче 8.15.

8.17. Показать, что множество M всех многочленов $P(x)$ степени не выше N таких, что $|P(x)| \le K$ (числа N, K фиксированы), является компактом в $C[0,1]$. Будет ли компактным множество всех степеней $\{x^n\}$?

Решение. Множество M замкнуто и ограничено в конечномерном пространстве $P_N \subset C[0,1]$, состоящем из многочленов степени не выше N. Поэтому M компактно в P_N, а значит и в $C[0,1]$.

Множество $\{x^n\}$ не является компактным, так как последовательность $\{x^n\}$ не имеет предельных точек в $C[0,1]$ (см. задачу 8.10).

8.18. Доказать, что компакт нельзя изометрически отобразить на собственную часть.

Решение. Предположим, от противного, что существует компакт K и изометрическое отображение $f : K \to K$ такие, что $f(K) = K_1 \ne K$. Рассмотрим точку $x \in K \setminus K_1$. Так как изометрическое отображение непрерывно, то K_1 — компакт. Поэтому $d = \rho(x, K_1) > 0$. Рассмотрим последовательность $\{f^{n-1}(x)\}$ ($f^0(x) = x$). В силу компактности K_1 из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{f^{n_k-1}(x)\}$. Но в силу изометричности f, для любого $p \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство

$$\rho(f^{n_k-1}(x), f^{n_{k+p}-1}(x)) = \rho(x, f^{n_{k+p}-n_k}(x)) \ge d,$$

так как $f^{n_{k+p}-n_k}(x) \in K_1$. Отсюда последовательность $\{f^{n_k-1}(x)\}$ не фундаментальна, а значит и не является сходящейся.

8.19. Доказать, что метрическое пространство (M, ρ) является компактом тогда и только тогда, когда любая непрерывная вещественная функция $f(x)$ ограничена на нем.

Решение. Если M компакт, то $f(M)$ — компакт на вещественной прямой, значит множество $f(M)$ ограничено.

Предположим, что M не является компактом. Построим неограниченную функцию $f(x) \in C(M)$. Так как M не компактно, то существует последовательность $\{x_n\}$ не имеющая предельных точек, такая что $x_i \ne x_j$ при $j \ne i$. Пусть $\overline{B}_{x_n,r_n}$ — последовательность замкнутых попарно не пересекающихся шаров, причем последовательность радиусов r_n стремится к нулю, а $M' = \bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{B}_{x_n,r_n/2}$. Рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{r_n - 2\rho(x,x_n)}{r_n}, & x \in \overline{B}_{x_n,r_n/2}, \\ 0, & x \notin \overline{B}_{x_n,r_n/2}, \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(x) = \begin{cases} k f_k(x), & x \in \overline{B}_{x_n, r_n/2}, \\ 0, & x \in M \setminus M'. \end{cases}$$

Так как $f(x_n) = n$, то $f(x)$ неограничена на M.

Покажем, что $f(x)$ непрерывна на M. Если $x \in B_{x_n,r_n}$ для некоторого n, то f непрерывна в точке x, так как $f|_{B_{x_n,r_n}} = n f_n|_{B_{x_n,r_n}}$, а функция f_n непрерывна на B_{x_n,r_n} в силу непрерывности метрики $\rho(x, x_n)$.

Если же $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} B_{x_n,r_n}$, то f непрерывна в точке x, поскольку существует окрестность U точки x, которая не пересекается с M', а значит $f|_U = 0$. Действительно, так как x не является предельной точкой последовательности $\{x_n\}$, то $d := \rho(x, \{x_n\}) > 0$. Так как r_n стремится к нулю, то $r_n < d$ начиная с некоторого номера n_0, поэтому шар $B_{x,d/2}$ не пересекается с $\overline{B}_{x_n,r_n/2}$ при $n \geq n_0$. (При $y \in \overline{B}_{x_n,r_n/2}$ имеем $|x-y| \geq |x - x_n| - |x_n - y| \geq d - r_n/2 \geq d/2$.) Так как множество $M'' = \cup_{n=1}^{n_0-1} \overline{B}_{x_n,r_n/2}$ замкнуто и не содержит x, то существует окрестность V точки x, не пересекающаяся с M''. Таким образом множество $U = V \cap B_{x,d/2}$ является искомым.

8.20. Пусть K — компактное метрическое пространство. Тогда пространство $C(K)$ сепарабельно.

Решение. Так как K компактно, то K сепарабельно (см. задачу 8.8). Пусть $M = \{t_n\} \subset K$ — счетное всюду плотное множество. По условию, для любого $m \in \mathbf{N}$ из покрытия компакта K шарами $B_{t,1/m}$, $t \in M$ можно выбрать конечное подпокрытие $B_{t_i,1/m}$, $i = 1, \ldots, n(m)$.

Пусть $\{\phi_i^m(x) | i = 1, \ldots, n(m)\}$ — разбиение единицы, ассоциированное с последним покрытием (то есть $\phi_i^m(x) \in C(K)$, $\phi_i^m(x) \geq 0$ на K, $\phi_i^m(x) = 0$ вне $B_{t_i,1/m}$ и $\sum_{i=1}^{n(m)} \phi_i^m(x) \equiv 1$ на K). Разбиение единицы можно построить, например, так: если $f_i(x) = \rho(x, M \setminus B_{t_i,1/m})$, то $\phi_i(x) = \frac{f_i(x)}{\sum_{j=1}^{n(m)} f_i(x)}$. (Знаменатель не обращается в нуль, так как любая точка $x \in K$ принадлежит одному из шаров $B_{t_i,1/m}$.)

Рассмотрим множество $E \subset C(K)$ всех функций вида

(*)
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n(m)} r_i \phi_i^m(x), m \in \mathbf{N}, r_1, \ldots r_n(m) \in \mathbf{Q}.$$

Множество E счетно. Покажем, что оно всюду плотно в $C(K)$. Действительно, пусть $f \in C(K)$ и $\varepsilon > 0$ фиксированы. В силу равномерной непрерывности функции $f(x)$[2] существует $\delta > 0$ такая, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $\rho(x,y) < \delta$. Возьмем $m > 1/\delta$ и $r_1, \ldots, r_n(m) \in \mathbf{Q}$ такие, что $|f(x) - r_i| < 2\varepsilon$ для всех $x \in B_{t_i,1/m}$. Тогда функция (*) удовлетворяет неравенству $||f - \phi|| < 2\varepsilon$,

[2] Функция, непрерывная на метрическом компакте является на нем равномерно непрерывной. Действительно, предположив, что это не так, получим, что существует число $\varepsilon > 0$ и две последовательности $\{x_n\} \subset K$, $\{y_n\} \subset K$, такие что $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ но $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Выберем из $\{x_n\}$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к $x_0 \in K$. Тогда последовательность $\{y_{n_k}\}$ тоже сходится к x_0 и, в силу непрерывности f, получаем $\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0$, что противоречит нашему предположению.

потому что для $x \in B_{t_i, 1/m}$ справедливо

$$|f(x) - \phi(x)| = |\sum_{i=1}^{n(m)} f(x)\phi_i^m(x) - \sum_{i=1}^{n(m)} r_i \phi_i^m(x)| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n(m)} |f(x) - r_i| \phi_i^m(x) < 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n(m)} \phi_i^m(x) = 2\varepsilon.$$

8.21. Пусть $p > 1$ и $s > p$. Найти условия на последовательность $\{a_k\}$ ненулевых чисел, при которых:

а) множество M_1 элементов $x \in l_p$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{x_k}{a_k}|^p \le 1$, будет компактным;

б) множество M_2 элементов $x \in l_p$ таких, что $\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{x_k}{a_k}|^s \le 1$, будет компактным.

Решение. Множества M_1 и M_2 являются замкнутыми, поэтому достаточно найти условия, при которых они будут относительно компактными.

а) Покажем, что M_1 относительно компактно тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1}$$

Действительно, если (1) выполнено, то последовательность $\{|a_n|\}$ ограничена некоторым числом N, поэтому $|x_n| \le N|\frac{x_n}{a_n}|$ при всех n, значит $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \le N^p \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{x_n}{a_n}|^p = N^p$ на множестве M_1, что доказывает ограниченность множества M_1. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, такой, что $|a_n| < \varepsilon$ при $n \ge n_0$. Отсюда $\sum_{n=n_0}^{\infty} |x_n|^p \le \varepsilon^p \sum_{n=n_0}^{\infty} |\frac{x_n}{a_n}|^p \le \varepsilon^p$ на множестве M_1, откуда следует условие (1) критерия относительной компактности в l_p.

Предположим теперь, что множество M_1 относительно компактно. Так как последовательности $(0, \dots, a_i, \dots)$ (все координаты кроме i-той равны нулю, i-я координата равна a_i) принадлежат множеству M_1, то из условия (1) критерия относительной компактности в l_p следует, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

б) Покажем, что M_2 относительно компактно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\frac{sp}{s-p}} < \infty. \tag{2}$$

Действительно, если (2) выполнено, то, согласно неравенству Гельдера, для любого k верно:

$$\sum_{n=k}^{\infty} |x_n|^p = \sum_{n=k}^{\infty} \left|\frac{x_n}{a_n}\right|^p |a_n|^p \le \left(\sum_{n=k}^{\infty} \left|\frac{x_n}{a_n}\right|^s\right)^{\frac{p}{s}} \left(\sum_{n=k}^{\infty} |a_n|^{\frac{sp}{s-p}}\right)^{\frac{s-p}{s}}. \tag{3}$$

Отсюда, аналогично а), получаем относительную компактность M_2.

Обратно, предположим, что (2) не выполнено. Аналогично (3), для любого k имеем

$$\sum_{n=1}^{k} |x_n|^p \le \left(\sum_{n=1}^{k} \left|\frac{x_n}{a_n}\right|^s\right)^{\frac{p}{s}} \left(\sum_{n=1}^{k} |a_n|^{\frac{sp}{s-p}}\right)^{\frac{s-p}{s}}.$$

Поскольку неравенство Гельдера для конечного числа слагаемых делается равенством для некоторых наборов $x_1, \dots, x_k$ (а также всех наборов, пропорциональных им), то существуют финитные последовательности $(x_1, \dots, x_k, 0, \dots)$ из множества M_2 со сколь угодно большой $\sum_{n=1}^{\infty} x^p$, что доказывает неограниченность M_2.

8.22. Выяснить, какие из множеств являются относительно компактными в пространстве $C[0,1]$:

а) пространство функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Гельдера–Липшица: $|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|^\alpha$, где числа $L > 0$, $\alpha \in (0,1]$ фиксированы и $f(0) = 0$;

б) $\{\sin(x+n)\}$;

в) $\{f(x) : \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \le 1, \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \le 1,$ $f(x)$ дифференцируема в каждой внутренней точке отрезка $[0,1]$, на концах существуют односторонние производные$\}$.

Решение. Воспользуемся теоремой Арцела.

а) Равностепенная непрерывность следует прямо из условия, равномерная ограниченность — из того, что $|f(x)| = |f(x) - f(0)| \le Lx^\alpha \le L$.

б) Множество равномерно ограничено, так как $|\sin(x+n)| \le 1$. Множество равностепенно непрерывно, так как для любого $n \in \mathbf{N}$

$$|\sin(x_1+n) - \sin(x_2+n)| = 2\left|\sin\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)\cos\left(\frac{x_1 + x_2 + 2n}{2}\right)\right| \le |x_1 - x_2|.$$

в) Множество равномерно ограничено по условию, равностепенная непрерывность следует из теоремы Лагранжа: $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| \le |x_1 - x_2|$.

8.23. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим множества:

а) E_1 — множество функций $f(x)$ дифференцируемых почти всюду на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$, $\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \le 1$;

б) E_2 — множество функций $f(x)$ дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$, $\int_0^1 |f'(x)|^2 dx \le 1$;

в) E_3 — множество дважды дифференцируемых на отрезке $[0,1]$ функций $f(x)$ удовлетворяющих условиям $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $\int_0^1 |f''(x)|^2 dx \le 1$;

г) $E_4 = \{f(x) = \int_0^x \phi(t)dt \mid \phi(t) \in C[0,1], |\phi(t)| \le 1, t \in [0,1]\}$.

Будут ли множества E_1 — E_4 компактными? Будут ли они относительно компактными?

Решение. Множество E_1 не ограничено, поскольку содержит функции вида $f(x) = C\phi(x)$, где C — произвольная константа, а $\phi(x)$ — канторова функция[3]. Тогда $f(x)$ дифференцируема п.в. на $[0,1]$ и удовлетворяет условиям $f(0) = 0$ и $f'(x) = 0$ п.в., следовательно $\int_0^1 |f'(x)|^2 dx = 0 \le 1$. Поэтому E_1 не является относительно компактным.

Покажем, что множество E_2 относительно компактно, но не компактно. Воспользуемся следующим утверждением: если производная $f'(x)$ существует

[3] то есть $\phi(x)$ — непрерывная монотонная функция на отрезке $[0,1]$, постоянная на каждом интервале, дополнительном к канторову совершенному множеству и принимающая на интервалах длины 3^{-k} значения $1/2^k$, $3/2^k$, …, $1 - 1/2^k$ (см. задачу 2.9).

всюду на $[a,b]$ и суммируема, то $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$. (Доказательство этого утверждения можно найти в книге [10], гл IX, §8, теорема 1.) В силу неравенства Коши-Буняковского $|f(x_2) - f(x_1)| = |\int_{x_1}^{x_2} f'(t)\cdot 1dt| \le \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} dt}\sqrt{\int_{x_1}^{x_2} |f(t)|^2 dt} \le \sqrt{x_2 - x_1}$ (мы считаем $x_2 \ge x_1$) откуда, аналогично задаче 22 а) получаем относительную компактность E_2. Рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\} \subset E_2$ такую, что

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}], \\ \frac{1}{2} + n(x - \frac{1}{2}), |x - \frac{1}{2}| \le \frac{1}{2n}, \\ 1, \quad x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1]. \end{cases}$$

Эта последовательность сходится в пространстве $C[0,1]$ к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0, 1/2], \\ x - 1/2, x \in [1/2, 1], \end{cases}$$

которая не дифференцируема при $x = 1/2$.

Применяя такие же рассуждения, как и в случае множества E_2, получаем, что множества E_3 и E_4 относительно компактны, но не компактны.

8.24. В пространстве $C^1[0,1]$ с нормой $||f|| = \max_{[0,1]} |f(x)| + \max_{[0,1]} |f'(x)|$ рассмотрим множество $M = \{f(x) : f(0) = 0, \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \le 1\}$. Будет ли M относительно компактным? Будет ли M компактным?

Решение. Множество M не будет ограниченным, а значит и не будет относительно компактным. Действительно, рассмотрим функцию $f_n(x) \in M$ такую, что

$$f_n'(x) = \begin{cases} n^3(x - 1/n^2), \quad x \in [0, 1/n^2] \\ 0, \quad x \in [1/n^2, 1]. \end{cases}$$

Тогда $||f_n|| \ge n$, что доказывает неограниченность M.

ГЛАВА IX. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Числовая функция f (вещественная или комплексная), определенная на линейном пространстве X[1] называется *линейным функционалом*, если:

1) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$;

2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

для $x_1, x_2, x \in X$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$).

Далее мы будем предполагать, что пространство X — линейное нормированное.

Линейный функционал f называется *ограниченным*, если существует число $M \geq 0$, такое что $|f(x)| \leq M||x||$ для всех $x \in X$. Линейный функционал f называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если из $x_n \to x$ следует $f(x_n) \to f(x)$. Линейный функционал f называется *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке пространства X. Заметим, что если линеный функционал непрерывен хотя бы в одной точке пространства X, то он непрерывен на всем пространстве X.

Утверждение 1. *Линейный функционал f непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Число $||f|| = \sup_{||x|| \leq 1} |f(x)|$ называется *нормой* функционала f.

Множество всех линейных непрерывных функционалов f, определенных на X, с введенной нормой $||f||$ образует линейное нормированное пространство. Оно называется *пространством, сопряженным с X* и обозначается X^*.

Утверждение 2. *Пространство X^*, сопряженное к линейному нормированному пространству X является банаховым.*

Теорема Хана-Банаха. *Всякий линейный непрерывный функционал f, определенный на линейном подпространстве L в X можно продолжить до линейного непрерывного функционала F, определенного на X, и притом так, что $||F||_X = ||f||_L$.*

Следствие 1. *Для любого вектора $x \in X$, $x \neq 0$ существует $f \in X^*$, такой что $f(x) = ||x||$ и $||f|| = 1$.*

Следствие 2. *Пусть $L \subset X$ — замкнутое линейное подпространство и $x \notin L$. Тогда существует $f \in X^*$, такой что $f|_L = 0$ и $f(x) = 1$.*

[1] Мы предполагаем, что X — линейное пространство над полем вещественных, или комплексных чисел.

Теорема Банаха-Штейнгауза. *Если последовательность $\{f_n\}$ линейных непрерывных функционалов, определенная на банаховом пространстве X, ограничена в каждой точке $x \in X$, то последовательность $\{||f_n||\}$ норм этих функционалов также ограничена.*

Последовательность элементов $\{x_n\}$ пространства X сходится *сильно* к элементу $x \in X$, если $\lim_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$.

Последовательность элементов $\{x_n\}$ пространства X сходится *слабо* к элементу $x \in X$, если $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ для любого функционала $f \in X^*$.

Отметим, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится сильно к элементу $x \in X$, то она сходится слабо к элементу $x \in X$.

Последовательность функционалов $\{f_n\}$ пространства X^* сходится *слабо* к элементу $f \in X^*$, если $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для любого элемента $x \in X$.

Общий вид линейных функционалов в некоторых функциональных пространствах.

1. Общий вид линейных функционалов в $C[a,b]$.

Теорема Рисса. *Для всякого непрерывного линейного функционала f на пространстве $C[a,b]$ найдется такая функция $g(t)$ с ограниченным изменением, что f выражается с помощью интеграла Стилтьеса по формуле*

$$f(x) = \int_a^b x(t)dg(t). \tag{1}$$

Справедливо и обратное

Утверждение 3. *Для любой функции $g(t)$ с ограниченным изменением формула $f(x) = \int_a^b x(t)dg(t)$ задает линейный функционал в пространстве $C[a,b]$. При этом $||f|| = V_a^b(g)$, если в каждой точке x интервала (a,b) значение $g(x)$ лежит между $g(x-0)$ и $g(x+0)$.*

Отметим, что соответствие между $f(x)$ и $g(t)$ неоднозначно, две функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$ с ограниченным изменением задают один и тот же функционал f, если разность $g_1(t) - g_2(t)$ постоянна на отрезке $[a,b]$ за исключением не более чем счетного числа точек из интервала (a,b).

2. Общий вид линейных функционалов в пространстве $L_p[a,b]$, $1 \le p < \infty$.

Утверждение 4. *Пусть $p > 1$. Всякий функционал $f \in L_p^*[0,1]$ задается равенством*

$$f(x) = \int_a^b x(t)\alpha(t)dt, \tag{2}$$

где $\alpha(t) \in L_q[a,b]$ — функция, определяемая по функционалу $f(x)$ $(1/p + 1/q = 1)$. Обратно, если $\beta(t) \in L_q[a,b]$, то $\phi(x) = \int_a^b x(t)\beta(t)dt$ является линейным функционалом на $L_p[a,b]$. При этом $||f|| = (\int_a^b |\beta(t)|^q dt)^{1/q}$.

Общий вид линейного функционала $f(x)$ в пространстве $L_1[a,b]$ дается формулой (2), где $\alpha(t) \in L_\infty[a,b]$ и $||f|| = essup_{[a,b]}|\alpha(t)|$.

3. Общий вид линейных функционалов в пространстве l_p, $1 \le p < \infty$ рассмотрен в задаче 9.2.

4. Общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве H.

Утверждение 5. *Пусть $f(x)$ — линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве H. Тогда существует и единственен элемент $u \in H$, такой что $f(x) = (x, u)$ ((x, u) — скалярное произведение). При этом $||f|| = ||u|| = \sqrt{(u, u)}$. И обратно, при любом $u \in H$ соотношение $f(x) = (x, u)$ определяет линейный непрерывный функционал.*

Понятие рефлексивного пространства.

Пространство, сопряженное с X^* называется *вторым сопряженным* к X и обозначается X^{**}. При фиксированном $x \in X$ каждому элементу $f \in X^*$ сопоставим число $f(x)$. Это соответствие линейно. Таким образом мы получили линейный функционал $F_x \in X^{**}$, $F_x(f) = f(x)$. Более того, F_x — непрерывный функционал, $||F_x|| = ||x||$. Поэтому всякому $x \in X$ соответствует функционал $F_x \in X^{**}$, причем соответствие $\phi : X \to X^{**}$, $\phi(x) = F_x$ между пространством X и множеством $\{F_x\} \subset X^{**}$ является изометрическим изоморфизмом.[2] Если же $\phi(X) = X^{**}$, то пространство X называется *рефлексивным.* Из утверждений 4, 5 и задачи 9.2. следует, что пространства L_p, l_p, $(1 < p < \infty)$ и любое гильбертово пространство являются рефлексивными.

Задачи

9.1. Найти норму функционала $f(x)$, определенного на пространстве M и определить, достигается ли она на замкнутом единичном шаре, если:

а) $M = C[K]$, **где** $K \subset \mathbf{R}^2$ — **замкнутый единичный круг,** ∂K — **граница круга** K,

$$f(x) = \iint_K x(t_1, t_2)dt_1dt_2 - \int_{\partial K} xds;$$

б) $M = C[-\pi, \pi]$, $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin t dt$;

в) $M = C[0, 1]$, $f(x) = -x(1/2) + \int_0^1 x(t)dt$;

г) $M = C^1[0, 1]$,[3] $f(x) = \int_0^1 tx(t)dt$.

Решение. а) $|f(x)| \le \iint_K ||x||dt_1dt_2 + \int_{\partial K} ||x||ds = 3\pi||x||$, отсюда $||f|| \le 3\pi$. С другой стороны, для последовательности $\{x_n(t_1, t_2)\}$, где

$$x_n(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \le 1 - \frac{2}{n} \\ n(1 - \frac{1}{n} - \sqrt{t_1^2 + t_2^2}), 1 - \frac{2}{n} \le \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \le 1 \end{cases}$$

получаем $||x_n|| = 1$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 3\pi$. Поэтому $||f|| = 3\pi$. Покажем, что норма не достигается на замкнутом единичном шаре. Допустим, от противного, что $|f(x)| = 3\pi$ для некоторого $x(t)$, $||x(t)|| \le 1$. Меняя, если нужно, $x(t)$ на $-x(t)$, можно считать $f(x) = 3\pi$. Тогда $\iint_K x(t_1, t_2)dt_1dt_2 = \pi$, $\int_{\partial K} xds = -2\pi$. В силу непрерывности $x(t_1, t_2)$, из первого равенства получаем $x(t_1, t_2)|_K = 1$, что противоречит второму равенству.

---

[2]то есть ϕ является линейным, сохраняющим норму биективным отображением

[3]Напомним, что $||x(t)|| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|$.

б) $|f(x)| \leq ||x|| \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(t)|dt = 4||x||$. С другой стороны, для последовательности $\{x_n(t)\}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} sgn(t), \frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi \\ nt, |t| \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

получаем $||x_n|| = 1$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 4$, поэтому $||f|| = 4$. Рассуждая аналогично а), получаем, что норма не достигается на замкнутом единичном шаре.

в) С одной стороны, $|f(x)| \leq 2||x||$. С другой стороны, рассматривая последовательность $\{x_n(t)\}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, \frac{1}{n} \leq |t - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2} \\ 2n|t - \frac{1}{2}| - 1, |t - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{n}, \end{cases}$$

получаем $||x_n|| = 1$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2$, поэтому $||f|| = 2$. Рассуждая аналогично а), получаем, что норма не достигается на замкнутом единичном шаре.

г) $|f(x)| \leq ||x|| \int_0^1 t = \frac{1}{2}||x||$. При $x(t) \equiv 1$ имеем $||x|| = 1$, $f(x) = 1$, поэтому $||f|| = 1$ и норма достигается на замкнутом единичном шаре.

9.2. Пусть $x = (x_1, \dots x_n, \dots)$. Доказать следующие утверждения:

а) всякий линейный непрерывный функционал в пространстве l_1 имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \tag{1}$$

где $a = (a_1, a_2, \dots) \in l_\infty$ и обратно, если $a \in l_\infty$, то формула (1) задает линейный непрерывный функционал, причем $||f|| = \sup_n |a_n|$;[4]

б) всякий непрерывный линейный функционал в пространстве l_p $(1 < p < \infty)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \tag{2}$$

где $a = (a_1, a_2, \dots) \in l_q$, $1/p + 1/q = 1$ и обратно, если $a \in l_q$, то формула (2) задает линейный непрерывный функционал, причем $||f|| = (\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^q)^{1/q}$.[5]

Решение. а) Пусть $f(x) \in l_1^*$. Обозначим $a_i = f(e_i)$, где $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (единица стоит на i-м месте). Тогда $a = (a_1, a_2, \dots) \in l_\infty$, так как

$$|a_i| \leq ||f|| \cdot ||e_i|| = ||f||. \tag{3}$$

Так как любой элемент $x = (x_1, \dots, x_n \dots) \in l_1$ является пределом последовательности $\{x^n\}$, где $x^n = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j.$$

[4] Таким образом пространство l_1^* изометрически изоморфно пространству l_∞.

[5] Таким образом пространство l_p^* изометрически изоморфно пространству l_q.

Обратно, если функционал $f(x)$ имеет вид (1) и $a \in l_\infty$, то

(4) $$|f(x)| \le \sup_n |a_n| \cdot ||x||,$$

значит функционал f ограничен, поэтому непрерывен. Сравнивая (3) и (4), получаем $||f|| = \sup_n |a_n|$.

б) Пусть $f(x) \in l_p^*$, e_i, a_i и a те же, что и в а). Аналогично а) получаем $f(x) = \sum_{j=1}^\infty a_j x_j$. Если все a_i равны нулю, то и $||f|| = 0$. Иначе возьмем такое n, что не все $a_1, \dots, a_n$ равны нулю. Рассмотрим $x^n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, где $x_k = |a_k|^{q-1} sgn(a_k)$ при $1 \le k \le n$. Так как $(q-1)p = q$, то

(5) $$f(x^n) = \sum_{j=1}^n |a_j|^q \le ||f|| \cdot ||x^n|| = ||f||(\sum_{j=1}^n |a_j|^q)^{1/p},$$

(6) $$(\sum_{j=1}^n |a_j|^q)^{1/q} \le ||f||.$$

Отсюда $a \in l_q$.

Обратно, пусть $a \in l_q$. Функционал f, определенный в (2), линеен и ограничен, так как из неравенства Гельдера следует

(7) $$|f(x)| \le (\sum_{j=1}^\infty |a_j|^q)^{1/q} (\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p)^{1/p}.$$

Сравнивая (6) и (7), получаем $||f|| = (\sum_{j=1}^\infty |a_j|^q)^{1/q}$.

9.3. Доказать, что каждое из пространств $c_0{}^*$ и c^*[6] изометрически изоморфно пространству l_1.

Решение. Пусть $f \in c_0^*$, e_i, a_i и a те же, что и в задаче 9.2. Так как любой $x = (x_1, \dots, x_n \dots) \in c_0$ является пределом последовательности $\{x^n\}$, где $x^n = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, то $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sum_{j=1}^\infty a_j x_j$. Для любого n рассмотрим последовательность $y^n = (sgn(a_1), \dots, sgn(a_n), 0, \dots) \in c_0$. Тогда $f(y^n) = \sum_{j=1}^n |a_j| \le ||f|| \cdot ||y_n|| = ||f||$, отсюда

(1) $$\sum_{j=1}^\infty |a_n| \le ||f||.$$

Таким образом $a \in l_1$.

Предположим теперь, что $a \in l_1$. Тогда соответствие $f(x) = \sum_{j=1}^\infty a_j x_j$, $x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0$ является линейным непрерывным функционалом, так как

(2) $$|f(x)| \le ||x|| \sum_{j=1}^\infty |a_j|.$$

[6] Напомним (см. главу 5), что c_0 — пространство сходящихся к нулю последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $||x|| = \sup_n |x_n|$, c — пространство сходящихся последовательностей с той же нормой, что и в c_0.

Сравнивая (1) и (2), получаем $||f|| = \sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$. Мы показали, что пространство c_0^* изометрически изоморфно l_1.

Пусть $f \in c^*$. Так как $f \in c_0^*$, то существует $a = (a_1, a_2, \dots) \in l_1$ такая, что $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j$ при $z = (z_1, z_2, \dots) \in c_0$. Положим $y = (1, 1, \dots) \in c$ (все координаты равны единице). Рассмотрим $x = (x_1, x_2, \dots) \in c$. Обозначим $l = \lim_{n\to\infty} x_n$. Так как $z = x - ly \in c_0$, то $f(x) = lf(y) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(x_j - l) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j + l(f(y) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j)$. Отсюда

(3) $$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j + r \lim_{n\to\infty} x_n,$$

где $r = f(y) - \sum_{j=1}^{\infty} a_j$. И обратно, если $a \in l_1$, $r \in \mathbf{R}$, то формула (3) задает линейный непрерывный функционал на c, так как

(4) $$|f(x)| \le ||x||(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j| + |r|).$$

Найдем $||f||$. Если $f \neq 0$, то при $x = (sgn(a_1), \dots, sgn(a_n), sgn(r), \dots)$ ($x_k = sgn(a_k)$ при $k \le n$ и $x_k = sgn(r)$ при $k > n$), получаем $||x|| = 1$, $|f(x)| = \sum_{j=1}^{n}|a_j| + \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j sgn(r) + |r| \le ||f||$. Поскольку $a \in l_1$, то $||f|| \ge \sum_{j=1}^{\infty}|a_j| + |r|$ и, учитывая (4), окончательно получаем

$$||f|| = \sum_{j=1}^{\infty}|a_j| + |r|.$$

9.4. Доказать, что пространство $L_1^*(\mathbf{R})$ изометрически изоморфно пространству $L_\infty(\mathbf{R})$.

Решение. Пусть $g \in L_\infty(\mathbf{R})$. Тогда для $x \in L_1(\mathbf{R})$ существует

(1) $$f(x) = \int x(t)g(t)dt.$$

Так как $|f(x)| \le ||g|| \int |x(t)|dt$, где $||g|| = essup\ |g(t)|$, то соотношение (1) задает линейный непрерывный функционал $f \in L_1^*(\mathbf{R})$, причем

(2) $$||f|| \le ||g||.$$

Рассмотрим $f \in L_1^*(\mathbf{R})$. Пусть $||f||$ — его норма. Введем подпространства $V_n = \{x \in L_1(\mathbf{R}) : x = 0$ п.в. на $\mathbf{R} \setminus [-n, n]\}$ $(n \in \mathbf{N})$. Отождествляя V_n с $L_1[-n, n]$ и используя утверждение 4, получаем что существует $g_n \in L_\infty[-n, n]$[7] такая, что

(3) $$f(x) = \int_{-n}^{n} g_n(t)x(t)dt$$

[7] то есть представитель соответствующего класса эквивалентности

для всех $x \in V_n$. Так как норма функционала $f(x)$, ограниченного на V_n, не превосходит $||f||$, то

(4) $$||g_n|| = essup_{[-n,n]}|g_n| \leq ||f||.$$

Поскольку каждое V_n является подпространством V_{n+1}, то $\int_{-n}^{n} x(t)(g_n(t) - g_{n+1}(t))dt = 0$ для всех $x \in V_n$, отсюда $g_n = g_{n+1}$ почти всюду на $[-n,n]$. Таким образом мы получили, что существует $g \in L_\infty(\mathbf{R})$ такая, что $g = g_n$ почти всюду на $[-n,n]$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и, согласно (4),

(5) $$||g|| \leq ||f||.$$

Из определения интеграла Лебега по множеству бесконечной меры следует, что любая $x \in L_1(\mathbf{R})$ является пределом в $L_1(\mathbf{R})$ последовательности $\{x_n\}$, где $x_n \in V_n$, $x_n = x$ почти всюду на $[-n,n]$. В силу непрерывности функционала $f(x)$ получаем $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} x(t)g(t)dt = \int x(t)g(t)dt$ (в силу сходимости последнего из интегралов). Сравнивая (2) и (5), получаем $||g|| = ||f||$. Поэтому соотношение (1) задает линейное взаимно однозначное соответствие между $L_1^*(\mathbf{R})$ и $L_\infty(\mathbf{R})$, сохраняющее норму.

9.5. Доказать, что линейный функционал в нормированном пространстве непрерывен тогда и только тогда, когда его ядро замкнуто.

Решение. Если линейный функционал $f(x)$ непрерывен на нормированном пространстве X, то он осуществляет непрерывное отображение пространства X в $\mathbf{R}$. Поэтому $ker(f) = f^{-1}(0)$ замкнуто как прообраз замкнутого множества.

Обратно, предположим, что $f(x)$ не непрерывен. Тогда $f(x)$ разрывен в каждой точке $x \in X$, в частности разрывен в нуле. Поэтому существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к нулю и число $C > 0$, такие что $|f(x_n)| > C$ для любого n. Последовательность $\{x'_n\}$, $x'_n = \frac{Cx_n}{f(x_n)}$ тоже сходится к нулю и удовлетворяет условию $f(x'_n) = C$. Отсюда, последовательность $\{y_n\}$, $y_n = x'_n - x'_1$ принадлежит $ker(f)$ и сходится к $-x'_1$. Но $x'_1 \notin ker(f)$, так как $f(x'_1) = C \neq 0$, значит $ker(f)$ не замкнуто.

9.6. Доказать, что вещественный линейный функционал, не принимающий в некотором шаре нормированного пространства хотя бы одно значение, непрерывен.

Решение. Пусть $f(x)$ — линейный функционал, определенный на нормированном пространстве X и не принимающий в некотором шаре B некоторое значение $y \in \mathbf{R}$. В силу линейности функционала $f(x)$, можно считать, что $B = \overline{B}_{0,1}$ — замкнутый шар единичного радиуса с центром в нуле. Также, из линейности $f(x)$ и выпуклости шара B следует, что множество $f(B) \subset \mathbf{R}$ выпукло (а значит и связно) и симметрично относительно точки 0. Так как $y \notin f(B)$, то множество $f(B)$ ограничено, поэтому функционал $f(x)$ ограничен, а значит и непрерывен.

9.7. Привести пример линейного функционала, не являющегося непрерывным.

Решение. Пусть $X = f$ — пространство финитных последовательностей (см. главу 5) $x = (x_1, x_2, \dots)$ с нормой $||x|| = \sup_n |x_n|$. Функционал $f(x) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} nx_n$ определен на f и линеен, однако $f(e_n) = n$, где $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$ (единица стоит на n-м месте). Так как $||e_n|| = 1$, то f не ограничен, а значит и не непрерывен.

9.8. Доказать, что пространства c_0, c, l_1 и $C[a,b]$ не являются рефлексивными.

Решение. Согласно задаче 9.3, пространство c_0^* состоит из функционалов вида $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i$, где $a = (a_1, a_2, \dots) \in l_1$ $(x = (x_1, x_2, \dots) \in c_0)$. Отождествляя каждый функционал f с соответствующим ему элементом a, получаем, что образ V_1 пространства c_0 при отображении $\phi : c_0 \to c_0^{**}$, $\phi(x)(f) = f(x)$ состоит из функционалов $g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i b_i$, где $(b_1, b_2, \dots) \in c_0$. Однако, например, отображение $\widetilde{g}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2i}$ задает линейный непрерывный функционал на пространстве c_0^* (см. задачу 9.2), который не содержится в V_1. Это доказывает нерефлексивность пространства c_0. Аналогично доказывается нерефлексивность пространства c.

Согласно задаче 9.2, пространство l_1^* состоит из функционалов вида $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i x_i$, где $a = (a_1, a_2, \dots) \in l_\infty$ $(x = (x_1, x_2, \dots) \in l_1)$ (см. задачу 9.2). Отождествляя каждый функционал f с соответствующей ему последовательностью $\{a_i\}$, получаем, что образ V_2 пространства l_1 при отображении $\psi : l_1 \to l_1^{**}$, $\psi(x)(f) = f(x)$ состоит из функционалов $g(f) = \sum_{n=1}^{\infty} a_i b_i$, где $\{b_i\} \in l_1$. Пусть $\mathcal{C}$ — подпространство в l_1^*, состоящее из функционалов f, для которых $a \in c$. Формула $h(f) = \lim_{n\to\infty} a_i$ задает линейный непрерывный функционал на $\mathcal{C}$ нормы 1. По теореме Хана-Банаха, существует функционал $H \in l_1^{**}$, $H|_{\mathcal{C}} = h$, $||H|| = 1$. Но этот функционал не содержится в пространстве V_2, что доказывает нерефлексивность пространства l_1.

Предположим, что пространство $C[a,b]$ рефлексивно. Тогда для любого элемента $F \in C^{**}[a,b]$ существует $x \in C[a,b]$ такой, что $F(f) = f(x) = \int_a^b x(t) d\widetilde{f}(t)$. Здесь $\widetilde{f}(t)$ — функция с ограниченным изменением, соответствующая функционалу $f \in C^*[a,b]$, такая что $\widetilde{f}(a) = 0$, $\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2}(\widetilde{f}(t-0) + \widetilde{f}(t+0))$, $t \in (a,b)$. Возьмем $\theta \in (a,b)$. Соотношение $G(f) = \widetilde{f}(\theta+0) - \widetilde{f}(\theta-0)$ задает ненулевой линейный и непрерывный (так как $|G(f)| \le Var_a^b \widetilde{f} = ||\widetilde{f}||$) функционал. Если же $G(f) = \int_a^b x(t) d\widetilde{f}(t)$ для некоторой $x \in C[a,b]$, то для $\widetilde{f}(t) = \int_a^t x(s) ds$[8] получаем $G(f) = 0$ в силу непрерывности $\widetilde{f}$. Но $G(f) = \int_a^b x^2(t) dt$, а $x \in C[a,b]$, поэтому $x(t) \equiv 0$. Это противоречит тому, что функционал $G(f)$ ненулевой.

9.9. Пусть X — банахово пространство, $M \subset X$, $M \ne X$ — замкнутое подпространство. Верно ли, что для любого элемента $f \in M^*$ существует единственный элемент $F \in X^*$, такой, что $F|_M = f$ и $||F||_X = ||f||_M$? Верно ли это утверждение, если X — гильбертово пространство?

Решение. В общем случае утверждение неверно. Например, если $X = C[0,1]$, M — пространство постоянных функций на отрезке $[0,1]$, функционал f удовлетворяет условию $f(c) = c$, для любой $c \in M$. Тогда $||f|| = 1$, но для любого $\theta \in [0,1]$ соотношение $F_\theta(x) = x(\theta)$ задает линейный непрерывный функционал на $C[0,1]$, $||F|| = 1$, $F_M = f$.

---

[8] эта функция имеет ограниченную производную, поэтому является функцией с ограниченным изменением

Если же X — гильбертово пространство, то продолжение единственно. Действительно, так как M — тоже гильбертово пространство, то существует единственный элемент $v \in M$ такой что $f(y) = (y, v)$ для всех $y \in M$. Пусть функционал $F \in X^*$, удовлетворяет условиям $F|_M = f$, $||F||_X = ||f||_M$ (его существование следует из теоремы Хана-Банаха). Тогда существует единственный элемент $u \in X$ такой, что $F(x) = (x, u)$, причем $||F|| = ||u||$. Для любого $x \in X$ существует единственное разложение $x = y + z$, где $y \in M$, $z \perp M$. Таким образом $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in M$, $u_2 \perp M$. Поэтому $F(x) = (y, u_1) + (z, u_2)$, Но $f(y) = F(y) = (y, u_1)$ для любого $y \in M$, отсюда $v = u_1$, и, так как $||f|| = ||F||$, то $u_2 = 0$, то есть $u = v$, что доказывает однозначность функционала f.

9.10. Пусть L — линейное подпространство банахового пространства X. Доказать, что L всюду плотно в $X \iff$ для любого $f \in X^*$, такого что $f|_L = 0$ следует, что $f|_X = 0$.

Решение. 1. Необходимость. Пусть L всюду плотно в X, $f \in X^*$, $f|_L = 0$. Тогда $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0$ $\exists x_\varepsilon \in L$: $||x - x_\varepsilon|| < \varepsilon$. Так как $|f(x)| = |f(x - x_\varepsilon)| \leq ||f|| \cdot ||x - x_\varepsilon|| < ||f||\varepsilon$, и так как ε — произвольное число, то $f(x) = 0$.

2. Достаточность. Пусть $\forall f \in X^*$: $f|_L = 0$ следует, что $f|_X = 0$. Пусть $\overline{L}$ — замыкание пространства L. Предположим, что L не всюду плотно в X. Тогда существует $x \in X \setminus \overline{L}$. Согласно следствию 2 теоремы Хана-Банаха, существует $f \in X^*$, такой что $f(x) = 1$, $f|_{\overline{L}} = 0$. Противоречие.

9.11. Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и последовательность $x = \{x_n\}$ такова, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ сходится для всех $y = \{y_n\} \in l_p$. Доказать, что $x \in l_q$, где $1/p + 1/q = 1$ (при $p = 1$ полагаем $q = \infty$, при $p = \infty$ полагаем $q = 1$).

Решение. Для любого $n \in \mathbf{N}$ соотношение $f_n(y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ задает линейный непрерывный функционал на l_p, причем $||f_n|| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q)^{1/q}$ при $p \neq 1$ и $||f_n|| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ при $p = 1$. По условию последовательность $\{f_n(y)\}$ ограничена в каждой точке $y \in l_p$, отсюда, по теореме Банаха-Штейнгауза, последовательность $||f_n||$ ограничена, поэтому $x \in l_q$.

9.12. Пусть двойная последовательность $\{a_{kl}\}$ такова, что для любой сходящейся к нулю последовательности $\{x_l\}$ последовательность $\{y_k\}$, $y_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l$ определена и ограничена. Доказать, что тогда для любой ограниченной последовательность $\{x_l\}$ последовательность $\{y_k\}$ определена и ограничена.

Решение. Покажем, что соотношение $\widetilde{y}_k(x) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l$ задает линейный непрерывный функционал на c_0. Действительно, для любого $n \in \mathbf{N}$ соотношение $y_{kn}(x) = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l$ задает линейный непрерывный функционал нормы $||y_{kn}|| = \sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|$. По теореме Банаха-Штейнгауза последовательность $\{||y_{kn}||\}$ ограничена, поэтому для любого $k \in \mathbf{N}$ величина $\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|$ ограничена, что доказывает непрерывность функционала $\widetilde{y}_k(x)$, причем

$$||\widetilde{y}_k|| = \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|.$$

Применяя теперь теорему Банаха-Штейнгауза к последовательности функционалов $\widetilde{y}_k$, получаем, что существует число C такое, что $||\widetilde{y}_k|| = \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| \leq C$ для всех $k \in \mathbf{N}$. Поэтому для любой $\{x_l\} \in l_\infty$ имеем $|y_k| = |\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} x_l| \leq C||x||$ ($||x|| = \sup_l |x_l|$), что доказывает ограниченность последовательности $\{y_k\}$.

9.13.(Теорема Теплица.) Пусть двойная последовательность $\{a_{kl}\}$ такова, что для любой сходящейся последовательности $\{x_l\}$ последовательность $\{y_k\}$, $y_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}x_l$ определена (то есть ряд сходится для любого $k \in \mathbf{N}$) и сходится к тому же пределу, что и последовательность $\{x_l\}$. Доказать, что:

а) $\lim_{k\to\infty} a_{kl} = 0$ для любого $l \in \mathbf{N}$.

б) $\lim_{k\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = 1$.

в) Существует $M > 0$ такое, что $\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}| \leq M$ для любого $k \in \mathbf{N}$.

Обратно, показать что для всякой двойной последовательности $\{a_{kl}\}$, удовлетворяющей условиям а), б), в) и для всякой сходящейся последовательности $\{x_l\}$ последовательность $\{y_k\}$, $y_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}x_l$ определена и сходится к тому же пределу, что и последовательность $\{x_l\}$.

Решение. а) Пусть $x_l = 0$, при $l \neq n$, $x_n = 1$. Тогда $\lim_{l\to\infty} x_l = 0$, $y_k = a_{kn}$, поэтому $0 = \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} a_{kn}$ для любого $n \in \mathbf{N}$.

б) Достаточно рассмотреть последовательность $\{x_l\}$, все элементы которой равны единице.

Для доказательства условия в) достаточно применить те же соображения, что и в задаче 9.12.

Обратно. В силу в), последовательность $\{y_k\}$ определена для любой сходящейся последовательности $\{x_l\}$. Обозначим $x = \lim_{l\to\infty} x_l$, $C = \sup_l |x_l|$. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда существует $L \in \mathbf{N}$ такое, что $|x_l - x| < \frac{\varepsilon}{3M}$ при $l \geq L$ (константа M взята из условия в)) и, согласно а) и б), существует $K \in \mathbf{N}$ такое, что $\sum_{l=1}^{L} |a_{kl}| \leq \frac{\varepsilon}{6C}$ и $|x||\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $k \geq K$.

Тогда при $k \geq K$ имеем

$$|y_k - x| = |\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}x_l - x| \leq |\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}(x_l - x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq 2C\sum_{l=1}^{L} |a_{kl}| + \sum_{l=L}^{\infty} |a_{kl}|\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

9.14. Пусть $f(x)$ — измеримая функция на отрезке $[0,1]$ и $fg \in L_1[0,1]$ для любой функции $g \in L_2[0,1]$. Доказать, что $f \in L_2[0,1]$.

Решение. Определим для любого $n \in \mathbf{N}$ функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), |f(x)| \leq n \\ 0, |f(x)| > n \end{cases}$$

Функция $f_n(x)$ измерима и ограничена, поэтому формула $\phi_n(g) = \int_0^1 f_n(x)g(x)dx$ задает линейный непрерывный функционал $\phi_n \in L_2^*[0,1]$, причем $||\phi_n|| = ||f_n||$. Так как $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ п.в. на $[0,1]$ и $|f_n(x)g(x)| \leq |f(x)g(x)|$ на $[0,1]$ для любой $g \in L_2[0,1]$, то, по теореме Лебега об ограниченной сходимости, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, значит последовательность функционалов ϕ_n сходится в каждой "точке" $g \in L_2[0,1]$. По теореме Банаха-Штейнгауза существует $C \geq 0$ такое, что $\int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = ||\phi_n(x)||^2 \leq C$, отсюда, по теореме Б.Леви, $\int_0^1 |f(x)|^2 dx \leq C$, что и требовалось доказать.

9.15. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функционалов, определенных на банаховом пространстве X, причем $\lim_{n\to\infty}||f_n|| = \infty$. Доказать, что:

а) Множество M' точек $x \in X$, в которых последовательность $\{f_n(x)\}$ ограничена, является множеством первой категории.

б) Множество M'' точек $x \in X$, в которых последовательность $\{f_n(x)\}$ неограничена, является множеством второй категории.

Решение. а) Пусть $M_k = \{x \in X : |f_n(x)| \le k$ для всех $n \in \mathbf{N}\}$. Тогда $M' = \cup_{n=1}^{\infty} M_k$. Достаточно показать, что каждое из множеств M_k нигде не плотно. Допустим противное. Тогда существуют $K \in \mathbf{N}$: $\overline{B}_{x_0,r} \in M_K$, то есть $|f_n(x)| \le K$ при $||x - x_0|| \le r$ и при всех $n \in \mathbf{N}$. Для любого $y \in X$, такого что $||y|| \le 1$ элемент $z = x_0 + ry \in \overline{B}_{x_0,r}$ поэтому $|f_n(y)| = 1/r|f(z) - f(x_0)| \le 2K/r$, значит $||f_n|| \le 2K/r$ при всех $n \in \mathbf{N}$, что противоречит условию.

Утверждение б) следует из а) и теоремы Бера.

9.16. Для $x \in C[0, 2\pi]$ положим $c_n(x) = \int_0^{2\pi} x(t)e^{-int}dt$. Показать, что для каждого $\alpha > 0$ множество $M_\alpha = \{x \in C[0, 2\pi], \lim_{n\to\infty} n^\alpha c_n(x) = 0\}$ есть множество первой категории в $C[0, 2\pi]$.[9]

Решение. Соотношение $f_n(x) = n^\alpha c_n(x)$ определяет линейный непрерывный функционал, $||f_n|| = 2\pi n^\alpha \to \infty$ при $n \to \infty$ $(\alpha > 0)$. Для каждого $\alpha > 0$ множество M_α содержится в множестве первой категории (в силу задачи 9.15.), а значит и само является множеством первой категории.

9.17. Показать, что если последовательность $\{f_n\}$ линейных функционалов, определенных на банаховом пространстве X слабо сходится, то последовательность $\{||f_n||\}$ норм этих функционалов ограничена.

Решение. Достаточно применить теорему Банаха-Штейнгауза.

9.18. Показать, что если последовательность $\{x_n\}$ элементов банахова пространства X слабо сходится, то последовательность $\{||x_n||\}$ норм этих элементов ограничена.

Решение. Пусть последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x. Для любого натурального n соотношение $g_n(f) = f(x_n)$ определяет линейный функционал на пространстве X^*. Так как $|g_n(f)| \le ||f||\cdot||x_n||$ для любого $f \in X^*$, то $||g_n|| \le ||x_n||$. Согласно следствию 1 теоремы Хана-Банаха, существует $f \in X^*$, такой что $||f|| = 1$ и $f(x_n) = ||x_n||$. Отсюда $g_n \in X^{**}$ и $||g_n|| = ||x_n||$. Поскольку, в силу утверждения 2, пространство X^* является банаховым и $\lim_{n\to\infty} g_n(f) = f(x)$ для любого $f \in X^*$, то по теореме Банаха-Штейнгауза, получаем, что последовательность $\{||g_n||\}$ ограничена. Так как $||g_n|| = ||x_n||$, то $\{||x_n||\}$ — ограниченная последовательность.

9.19. Доказать, что в пространстве l_1 слабая сходимость совпадает с сильной сходимостью.

Решение. Так как из сильной сходимости всегда следует слабая сходимость, то достаточно показать, что в пространстве l_1 из слабой сходимости следует сильная сходимость. Это утверждение равносильно тому, что если

[9] Напомним, что при $\alpha = 0$ это множество совпадает со всем $C[0, 2\pi]$ по лемме Римана-Лебега.

последовательность $\{x^n\} \subset l_1$ слабо сходится к нулю, то $\lim_{n\to\infty} ||x^n|| = 0$. Допустим, что последнее утверждение неверно. Тогда существует число $M > 0$ и существует подпоследовательность $\{x^{n_k}\}$ последовательности $\{x^n\}$, такие что $||x^{n_k}|| \geq M$, $k \in \mathbf{N}$. Положим $y^k = x^{n_k}$, $k \in \mathbf{N}$. Мы построим подпоследовательность $\{y^{k_l}\}$ и функционал $f \in l_1^*$, такие что $||f|| = 1$, $|f(y^{k_l})| \geq \frac{M}{4}$, $l \in \mathbf{N}$, что противоречит слабой сходимости к нулю последовательности $\{y^k\}$.

Пусть $y^k = (y_1^k, y_2^k, \dots)$. Так как для любого $j \in \mathbf{N}$ соотношение $\phi_j(y) = y_j$ (где $y = (y_1, y_2, \dots)$) задает линейный непрерывный функционал на l_1, то

$$\forall j \in \mathbf{N} \lim_{k\to\infty} y_j^k = 0. \tag{1}$$

Положим $k_1 = 1$. Так как $y^1 \in l_1$, то $\exists j_1 \in \mathbf{N}$: $\sum_{j=j_1+1}^{\infty} |y_j^1| < \frac{M}{8}$. Согласно (1), $\exists k_2 > k_1$: $\sum_{j=1}^{j_1} |y_j^{k_2}| < \frac{M}{8}$. Так как $y^{k_2} \in l_1$, то $\exists j_2 > j_1$: $\sum_{j=j_2+1}^{\infty} |y_j^{k_2}| < \frac{M}{8}$. Поскольку $||y^{k_2}|| \geq M$, то $\sum_{j=j_1}^{j_2} |y_j^{k_2}| \geq \frac{3M}{4}$. Рассуждая по индукции, получаем, что существуют возрастающие последовательности

$$k_1 < k_2 < \dots < k_l < \dots, j_1 < j_2 < \dots < j_l < \dots,$$

такие что при $l \geq 2$ справедливо

$$\sum_{j=1}^{j_{l-1}} |y_j^{k_l}| < \frac{M}{8},\ \sum_{j=j_l+1}^{\infty} |y_j^{k_l}| < \frac{M}{8},\ \sum_{j=j_{l-1}+1}^{j_l} |y_j^{k_l}| > \frac{3M}{4}. \tag{2}$$

Пусть $a_j = sgny_j^{k_1}$ при $1 \leq j \leq j_1$, $a_j = sgny_j^{k_l}$ при $j_{l-1}+1 \leq j \leq j_l$. Положим $f(y) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j$. Так как $(a_1, a_2, \dots) \in l_\infty$, то $f \in l_1^*$. Оценим $f(y^{k_l})$ при $l \geq 2$, учитывая (2).

$$|f(y^{k_l})| = |\sum_{j=1}^{j_{l-1}} a_j y_j^{k_l} + \sum_{j=j_{l-1}+1}^{j_l} a_j y_j^{k_l} + \sum_{j=j_l+1}^{\infty} a_j y_j^{k_l}| \geq$$

$$\geq \sum_{j=j_{l-1}+1}^{j_l} |y_j^{k_l}| - \sum_{j=1}^{j_{l-1}} |y_j^{k_l}| - \sum_{j=j_l+1}^{\infty} |y_j^{k_l}| > \frac{M}{4}.$$

9.20. Показать, что в пространстве l_p, $1 < p < \infty$ последовательность $\{x^n\}$ $(x^n = (x_1^n, x_2^n, \dots))$ сходится слабо к $x = (x_1, x_2, \dots)$ $\Longleftrightarrow$ последовательность $\{||x^n||\}$ ограничена и $\forall j \in \mathbf{N}$ $\lim_{n\to\infty} x_j^n = x_j$.

Решение. Необходимость. Пусть последовательность $\{x^n\}$ слабо сходится к x. Тогда, согласно задаче 9.18., последовательность $\{||x^n||\}$ ограничена. Рассмотрев для любого $j \in \mathbf{N}$ функционал $f_j \in l_p^*$, $f_j(y_1, y_2, \dots) = y_j$, получаем, что $\lim_{n\to\infty} x_j^n = \lim_{n\to\infty} f_j(x^n) = f_j(x) = x_j$.

Достаточность. Достаточно показать, что если $\exists C : ||x^n|| < C$ и $\forall j \in \mathbf{N} \lim_{n\to\infty} x_j^n = 0$, то последовательность $\{x^n\}$ слабо сходится к нулю. Пусть $f \in l_p^*$. Тогда существует последовательность $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_q$, где $\frac{1}{p} +$

$\frac{1}{q} = 1$, такая что $f(x^n) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j x_j^n$. Так как $y \in l_q$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon)$: $\sum_{j=M+1}^{\infty} |y_j^q| < (\frac{\varepsilon}{2C})^q$. Поэтому $\forall n \in \mathbf{N}$

$$|\sum_{j=M+1}^{\infty} y_j x_j^n| \le (\sum_{j=M+1}^{\infty} |y_j^q|)^{\frac{1}{q}} (\sum_{j=M+1}^{\infty} |x_j^n|^p)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2C} C = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $\lim_{n\to\infty} x_j^n = 0$ при $1 \le j \le N$, то $\exists N = N(\varepsilon)$:

$$|\sum_{j=1}^{M} x_j^n y_j| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \ge N.$$

Окончательно получаем, что при $n \ge N(\varepsilon)$

$$|\sum_{j=1}^{\infty} x_j^n y_j| \le |\sum_{j=1}^{M} x_j^n y_j| + |\sum_{j=M+1}^{\infty} y_j x_j^n| < \varepsilon.$$

9.21. Доказать, что гильбертово пространство H полно относительно слабой сходимости, то есть если $\{x_n\} \subset H$ — последовательность, такая что для любого $y \in H$ последовательность (x_n, y) сходится, то существует $x_0 \in H$ такой, что $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x_0, y)$ для любого $y \in H$.

Решение. Пусть $f_n(y) = (x_n, y)$. Тогда $f_n \in H^*$ и по теореме Банаха-Штейнгауза существует C, такое что $||f_n|| \le C$ при $n \in \mathbf{N}$. Для любого y существует $f_0(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y)$. Так как $f_0(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(y_1) + \mu \lim_{n\to\infty} f_n(y_2) = \lambda f_0(y_1) + \mu f_0(y_2)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, то f_0 — линейный функционал. Также $|f_0(y)| \le \overline{\lim}_{n\to\infty} |f_n(y)| \le C||y||$, поэтому f_0 — непрерывный функционал. Значит существует $x_0 \in H$, такой что $f_0(y) = (x_0, y)$ для любого $y \in H$, поэтому $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x_0, y)$ для любого $y \in H$.

9.22. Доказать, что единичный шар $B = \{||x|| \le 1\}$ сепарабельного гильбертова пространства слабо компактен, то есть из любой последовательности $\{x_n\} \subset B$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, причем ее слабый предел содержится в B.[10]

Решение. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset B$. Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H. Так как $|(x_n, e_1)| \le ||x_n|| \cdot ||e_1|| = 1$, то последовательность $\{(x_n, e_1)\}$ ограничена, значит из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{(x_n^{(1)}, e_1)\}$. Последовательность $\{(x_n^{(1)}, e_2)\}$ также ограничена, поэтому из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{(x_n^{(2)}, e_2)\}$. Далее, по индукции, из ограниченной последовательности $\{(x_n^{(j-1)}, e_j)\}$ выделяем сходящуюся подпоследовательность $\{(x_n^{(j)}, e_j)\}$. Рассмотрим диагональную последовательность $\{x_k^{(k)}\}$. По построению, последовательность $\{(x_k^{(k)}, e_j)\}$ сходится для любого e_j. В силу линейности скалярного произведения, сходится последовательность $\{(x_k^{(k)}, \sum_{j=1}^{n} f_j e_j)\}$ для любой линейной комбинации $\sum_{j=1}^{n} f_j e_j$.

[10]Аналогичное утверждение справедливо и в любом рефлексивном банаховом пространстве

Рассмотрим теперь любой элемент $y \in H$. Пусть $\sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j$ — ряд Фурье этого элемента по ортонормированной системе $\{e_j\}$ (то есть $f_j = (y, e_j)$). Для любого $\varepsilon > 0$ существует n, такой что $\|\sum_{j=n+1}^{\infty} f_j e_j\| < \varepsilon/4$. Для любых $k, m \in \mathbf{N}$ имеем

$$|(x_k^{(k)}, y) - (x_m^{(m)}, y)| \leq |(x_k^{(k)} - x_m^{(m)}, \sum_{j=1}^{n} f_j e_j)| +$$

$$+(\|x_k^{(k)}\| + \|x_m^{(m)}\|)\| \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j e_j\| < |(x_k^{(k)} - x_m^{(m)}, \sum_{j=1}^{n} f_j e_j)| + \varepsilon/2.$$

Так как существует номер n_1, такой что $((x_k^{(k)} - x_m^{(m)}, \sum_{j=1}^{n} f_j e_j)| < \varepsilon/2$ при $k, m > n_1$, то $|(x_k^{(k)}, y) - (x_m^{(m)}, y)| < \varepsilon$ при $k, m > n_1$. В силу критерия Коши, последовательность $(x_k^{(k)}, y)|$ сходится и, в силу слабой полноты пространства H (см. задачу 9.21.), существует $x_0 \in H$, к которому слабо сходится последовательность $x_k^{(k)}$.

Беря $y = x_0$, получаем что $\|x_0\|^2 = \lim_{k\to\infty}(x_k^{(k)}, x_0) \leq \|x_0\|$, значит $\|x_0\| \leq 1$.

9.23. Показать, что в пространстве l_2 замыкание единичной сферы $s = \{x \in l_2 : \|x\| = 1\}$ относительно слабой сходимости совпадает с единичным шаром $B = \{\|x\| \leq 1\}$, то есть показать, что

1) $\forall x_0 \in B \ \exists \ \{x_n\} \subset s$: $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0.

2) $\forall x_0 \in l_2 \setminus B \ \forall \{x_n\} \in s \ \exists f \in l_2^*$: $f(x_n) \not\to x_0$.

Решение. 1) Пусть $x_0 = 0$. Тогда последовательность $\{e_n\}$ базисных векторов слабо сходится к x_0. Если же $x_0 \in B \setminus \{0\}$, $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots)$, рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, $x_n = x_0 - \lambda_n e_n$, где $\lambda_n = x_0^n - \sqrt{(x_0^n)^2 + 1 - \|x_0\|^2}$. Тогда $x_n \in s$, $|\lambda_n| \leq |x_0^n| + 1 \leq 2$, $n \in \mathbf{N}$, поэтому последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0.

2) Пусть $\|x_0\| > 1$. Согласно следствию 1 теоремы Хана-Банаха, существует функционал $f \in l_2^*$, такой что $\|f\| = 1$ и $f(x_0) = \|x_0\|$. При $x \in s$ имеем $|f(x)| \leq \|f\|\cdot\|x\| = 1 < |f(x_0)|$, поэтому никакая последовательность элементов из s не может слабо сходится к x.

ГЛАВА X. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть X и Y — линейные топологические пространства, определенные одновременно над полем вещественных или комплексных чисел. Отображение $A : X \to Y$ называется *линейным оператором*, если

1) $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$;
2) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ для всех $x \in X$ и любых $\lambda \in \mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$).

Далее мы будем предполагать, что пространство X — линейное нормированное. Мы также будем далее писать Ax вместо $A(x)$.

Линейный оператор A называется *ограниченным*, если существует $M \geq 0$, такая что $||Ax|| \leq M||x||$ для всех $x \in X$. Линейный оператор A называется *непрерывным в точке* $x \in X$, если $||Ax_n - Ax|| \to 0$ при $||x_n - x|| \to 0$. (Здесь $||Ax||$ и $||Ax_n - Ax||$ — нормы в пространстве Y, а $||x||$ и $||x_n - x||$ — нормы в пространстве X.)

Линейный оператор A называется *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке пространства X. Заметим, что если линейный оператор непрерывен хотя бы в одной точке пространства X, то он равномерно непрерывен на всем пространстве X.

Утверждение 1. *Линейный оператор f непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен.*

Число $||A|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Ax||$ называется *нормой* оператора A.

Множество всех линейных непрерывных операторов $A : X \to Y$ с введенной нормой $||A||$ образует линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$. Множество $\mathcal{L}(X, X)$ является кольцом с единицей.

Утверждение 2. *Если Y полно, то $\mathcal{L}(X, Y)$ — банахово пространство.*

Теорема Банаха-Штейнгауза. *Если последовательность $\{A_n\}$ линейных непрерывных операторов, определенная на банаховом пространстве X, ограничена в каждой точке $x \in X$, то есть*

$$||A_n x|| \leq M_x, n \in \mathbf{N},$$

то последовательность норм $\{||A_n||\}$ этих операторов также ограничена.

Принцип открытости. *Пусть X, Y — банаховы пространства, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ — сюрьективный оператор, B_X и B_Y — открытые единичные шары в пространствах X и Y. Тогда $\theta B_Y \subset A(B_X)$ для некоторого $\theta > 0$.*

Последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ сходится *равномерно* к элементу $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, если $\lim_{n\to\infty} ||A_n - A|| = 0$. Последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$

сходится *сильно* к элементу $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, если $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$ для любого элемента $x \in X$. Равномерная сходимость влечет сильную сходимость к тому же элементу пространства $\mathcal{L}(X,Y)$. Последовательность $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ сходится *слабо* к элементу $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, если $\lim_{n\to\infty} y(A_n x) = y(Ax)$ для любых $x \in X$ и $y \in Y^*$. Сильная сходимость влечет слабую сходимость к тому же элементу пространства $\mathcal{L}(X,Y)$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Если существует отображение $A^{-1} : Y \to X$, такое что

$$A^{-1}Ax = x$$

для любого $x \in X$ и

$$AA^{-1}y = y$$

для любого $y \in Y$, то A^{-1} называется оператором, обратным к оператору A. Обратный оператор является линейным, но, вообще говоря, не непрерывным.

Теорема Банаха об обратном операторе. *Если линейный непрерывный оператор A отображает взаимно-однозначно банахово пространство X на банахово пространство Y, то $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.*

Пусть $A \in \mathcal{L}(X,X)$. Если оператор $A - \lambda E$ имеет обратный линейный непрерывный оператор $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$, то число λ называется *регулярным* для оператора A, а оператор R_λ называется *резольвентой* оператора A. Совокупность всех остальных значений λ называется *спектром* оператора A. Далее мы будем обозначать спектр оператора A символом $\sigma(A)$. Совокупность регулярных значений оператора A является открытым множеством, а его спектр — замкнутым множеством.

Число λ называется *собственным значением* оператора A, если уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевые решения, которые, в свою очередь называются собственными векторами оператора A, отвечающими собственному значению λ. Совокупность всех собственных значений оператора называется *точечным спектром*.

Совокупность чисел λ, не являющихся собственными значениями, для которых замыкание образа оператора $A - \lambda E$ является собственным подпространством в X, называется *остаточным спектром*.

Совокупность чисел λ, не являющихся собственными значениями и не принадлежащих остаточному спектру, называется *непрерывным спектром*.

Число $r(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$ называется *спектральным радиусом оператора* A.

Утверждение 3. *Пусть $A \in \mathcal{L}(X,X)$. Если $|\lambda| > ||A||$, то оператор R_λ определен и является ограниченным. При этом*

$$R_\lambda = -\frac{1}{\lambda}(E + \frac{A}{\lambda} + \frac{A^2}{\lambda^2} + \ldots).$$

Утверждение 4 (формула спектрального радиуса). *Если $A \in \mathcal{L}(X,X)$, где X — банахово пространство, то*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} ||A^n||^{1/n}.$$

Утверждение 5. *Спектр любого элемента $A \in \mathcal{L}(X, X)$, где X — банахово пространство, непуст.*

Рассмотрим $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Пусть $\phi \in Y^*$. Тогда соответствие

$$f(x) = \phi(Ax)$$

(1)
определяет линейный функционал $f \in X^*$. Таким образом (1) задает некоторый оператор $A' : Y^* \to X^*$, который называется оператором, *сопряженным* с оператором A. Оператор A' является линейным и ограниченным, причем $||A'|| = ||A||$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(H, H)$, где H — гильбертово пространство. Тогда оператор A^* называется *гильбертовым сопряженным* к оператору A, если

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

для любых $x, y \in H$. (Мы отождествляем H^* и H, пользуясь тем, что для любого линейного функционала $f \in H^*$ существует единственный элемент $y \in H$, такой что $f(x) = (x, y)$ для любого $x \in H$). Если $A = A^*$, то оператор A называется *самосопряженным.*

Далее, для операторов, действующих в гильбертовом пространстве будем говорить "сопряженный" вместо "гильбертов сопряженный".

Операция гильбертового сопряжения обладает свойствами:

а) $(A^*)^* = A$,
б) $(\lambda A + \mu B)^* = \overline{\lambda} A^* + \overline{\mu} B^*$,
в) $(AB)^* = B^* A^*$,
г) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$, если A^{-1} существует,
д) $||A^*|| = ||A||$,
е) $||A^*A|| = ||A||^2$

Здесь $A, B \in \mathcal{L}(H, H)$, $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$.

Пример. Пусть в $L_2[0, 1]$ определен оператор

$$Ax = y(t) = \int_0^1 K(t, s) f(s) ds.$$

Тогда сопряженный оператор A^* имеет вид

$$A^*(f) = g(t) = \int_0^1 \overline{K(s, t)} f(s) ds.$$

Утверждение 6. *Спектр самосопряженного оператора A лежит целиком на отрезке $[m, M]$ вещественной прямой, где*

$$m = \inf_{||x||=1} (Ax, x), M = \sup_{||x||=1} (Ax, x),$$

причем числа m и M — точки спектра.

Линейный оператор A, отображающий банахово пространство X в банахово пространство Y называется *компактным (или вполне непрерывным)*, если он каждое ограниченное множество пространства X переводит в относительно компактное множество пространства Y. Компактный оператор является ограниченным. Оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ является компактным если и только если образ единичного шара в X является относительно компактным множеством в Y.

Утверждение 7. *Компактный оператор A отображает любую последовательность $\{x_n\}$ слабо сходящуюся к x_0 в последовательность сильно сходящуюся к Ax_0.*

Утверждение 8. *Если X и Y — банаховы пространства и последовательность компактных операторов $\{A_n\}$, $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ равномерно сходится к оператору A, то A также компактный оператор.*

Утверждение 9. *Пусть $X = Y = L_2[0,1]$, $K \in L_2([0,1] \times [0,1])$. Тогда оператор $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$ компактен.*

Утверждение 10. *Пусть $A_1 \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$, $A_2 \in \mathcal{L}(X_2, X_3)$, X_1, X_2, X_3 — банаховы пространства. Тогда если один из операторов A_1, A_2 компактен, то оператор $A \in \mathcal{L}(X_1, X_3)$, $A = A_1A_2$ компактен.*

Теорема Гильберта–Шмидта. *Для любого компактного самосопряженного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует ортонормированная система $\{\phi_n\}$ собственных векторов (конечная или счетная), отвечающих собственным значениям λ_n, такая, что каждый элемент $x \in H$ представим единственным образом в виде*

$$x = \sum_n c_n\phi_n + x',$$

где x' удовлетворяет условию $Ax' = 0$ и для всех $x \in H$ выполнено равенство $Ax = \sum_n \lambda_n c_n \phi_n$. Здесь $\sum_n$ — сумма конечного или счетного числа слагаемых, и если число слагаемых бесконечно, то $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Кроме того, $||A|| = \max_n |\lambda_n|$.

Из теоремы Гильберта–Шмидта следует, что для любого компактного самосопряженного оператора A в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует ортонормированный базис пространства H, состоящий из собственных векторов этого оператора.

Задачи

10.1. Пусть X и Y — банаховы пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Показать, что следующие утверждения равносильны:

(1) A непрерывен;

(2) Если $\{x_n\}$ — последовательность элементов из X, такая что $x_n \to x$ и $Ax_n \to y$, то $Ax = y$.

Решение. Очевидно из (1) следует (2). Покажем, что из (2) следует (1). Рассмотрим в пространстве $X \times Y$ подмножество $M = \{(x, Ax), x \in X\}$. Так как оператор A линеен, то M является линейным подпространством в $X \times Y$. В силу условия (2) подпространство M замкнуто в $X \times Y$. Так как $X \times Y$ — банахово пространство (см. задачу 7.19), то M — тоже банахово пространство. Соотношения $P_1(x, y) = x$, $P_2(x, y) = y$ задают два линейных непрерывных оператора $P_1 : M \to X$ и $P_2 : M \to Y$. Поскольку P_1 является биекцией между X и M, то по теореме Банаха об обратном операторе, оператор $P_1^{-1} : X \to M$, $x \to (x, Ax)$ является непрерывным. Так как $A = P_2P_1^{-1}$, то A — непрерывный оператор.

10.2. Пусть $Ax(t) = tx(t)$. Найти норму оператора A в случаях:
a) $A : C[0, a] \to C[0, a]$,
b) $A : L_2[0, a] \to L_2[0, a]$.

Решение. a) $|Ax(t)| \le a|x(t)|$ при $0 \le t \le a$, отсюда $||A|| \le a$. При $x(t) \equiv 1$ имеем $||x|| = 1$, $||Ax|| = a$. Следовательно $||A|| = a$.

b) $||Ax|| = \sqrt{\int_0^a t^2 x^2(t)dt} \le \sqrt{\int_0^a a^2 x^2(t)dt} = a||x||$, следовательно $||A|| \le a$. Рассмотрим функцию

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, 0 \le t < a - \varepsilon \\ 1, a - \varepsilon \le t \le a, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon < a.$$

Имеем $||x_\varepsilon|| = \sqrt{\varepsilon}$, $||Ax_\varepsilon|| = \sqrt{(a^3 - (a-\varepsilon)^3)/3}$, отсюда $\lim_{\varepsilon \to 0+0} \frac{||Ax_\varepsilon||}{||x_\varepsilon||} = a$, значит $||A|| = a$.

10.3. Определить норму и спектр оператора $A : l_2 \to l_2$, если

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Решение. $||Ax|| \le ||x||$. С другой стороны, $||Ax|| = ||x||$ при $x_1 = 0$ ($x = (x_1, x_2, \dots)$), отсюда $||A|| = 1$.

Последовательность $x = (x_1, x_2, \dots)$ является формальным решением уравнения $Ax = \lambda x$ тогда и только тогда, когда она пропорциональна $(1, \lambda, \lambda^2, \dots)$. Так как $(1, \lambda, \lambda^2, \dots) \in l_2 \iff |\lambda| < 1$, то $\{|\lambda| < 1\} \subset \sigma(A)$. С другой стороны, числа $\lambda : |\lambda| > 1$ регулярны (согл. утв.3). Таким образом, множество $|\lambda| \le 1$ является спектром оператора A в силу замкнутости спектра.

Отметим, что при $|\lambda| = 1$ образ оператора $A - \lambda E$ всюду плотен в l_2, так как содержит базисные векторы e_j (j-я координата равна единице, остальные координаты равны нулю). Действительно, если $x_j = -(\frac{1}{\lambda^j}, \frac{1}{\lambda^{j-1}}, \dots, \frac{1}{\lambda}, 0, \dots)$, то $(A - \lambda E)(x_j) = e_j$. Поэтому множество $|\lambda| = 1$ образует непрерывный спектр оператора A.

10.4. Определить спектр оператора $Ax = tx(t)$ в пространстве $C[0, a]$.

Решение. Если $Ax = \lambda x$, то $x(t)(t - \lambda) \equiv 0$, поэтому $x(t) \equiv 0$ в силу непрерывности $x(t)$. Значит точечный спектр отсутствует. При $\lambda \in [0, a]$ образ оператора $A - \lambda E$ содержится в собственном подпространстве $\{y(t) \in C[0, a], y(\lambda) = 0\}$, поэтому эти точки принадлежат остаточному спектру. При $\lambda \notin [0, a]$ оператор $R_\lambda(y) = \frac{y(t)}{t - \lambda}$ является ограниченным, поэтому спектр совпадает с отрезком $[0, a]$.

10.5. Определить норму и спектр оператора $A : l_2 \to l_2$, если

$$A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots).$$

Решение. Аналогично задаче 10.3, получаем $||A|| = 1$; точечный спектр совпадает с множеством $\{\frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$, собственные элементы, отвечающие значению $\frac{1}{n}$ пропорциональны вектору e_n; точка 0 принадлежит непрерывному спектру. Пусть $K = \{\frac{1}{n}\} \cup 0$. При $\lambda \notin K$ оператор $R_\lambda(y) = \{\frac{y_1}{1-\lambda}, \dots, \frac{y_n}{1/n - \lambda}, \dots\}$

$(y = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\})$ является ограниченным так как $|R_\lambda(y)| \leq ||y||/\rho(\lambda, K)$. Окончательно, спектр совпадает с множеством K.

10.6. Пусть $\{a_n\}$ — числовая последовательность.

а) Доказать, что соотношение $A(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (a_1x_1, \ldots, a_nx_n, \ldots)$ задает ограниченный оператор в l_2 тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

б) Найти норму и спектр оператора A в случае ограниченной последовательности $\{a_n\}$.

Решение. а) Так как $Ae_n = a_ne_n$, то из ограниченности оператора A следует, что $\sup_n |a_n| \leq ||A||$. Обратно, если $C = \sup_n |a_n| < \infty$, то $||Ax|| \leq C||x||$ для любого $x \in l_2$, значит $||A|| \leq C$.

б) Учитывая а), получаем $||A|| = \sup_n |a_n|$ и $K = \overline{\{a_n\}} \in \sigma(A)$, причем элементы последовательности $\{a_n\}$ принадлежат точечному спектру.

Пусть $\lambda \notin K$. Тогда для любого $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in l_2$ определен $R_\lambda(y) = (\frac{y_1}{a_1 - \lambda}, \ldots, \frac{y_n}{a_n - \lambda}, \ldots)$, причем $||R_\lambda(y)|| \leq ||y||/\rho(\lambda, K)$, что доказывает регулярность значения λ. Значит $\sigma(A) = K$.

Покажем, что точки множества $K \setminus \{a_n\}$ принадлежат непрерывному спектру оператора A. Пусть $\lambda \in K \setminus \{a_n\}$.Тогда образ оператора $A - \lambda E$ всюду плотен в l_2, так как содержит базисные векторы e_i.

10.7. Показать, что для любого компакта $K \subset \mathbf{C}$ существует оператор $A \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$, такой что $\sigma(A) = K$.

Показать, что при $K \subset \mathbf{R}$ такой оператор A можно выбрать самосопряженным.

Решение. В силу компактности множества K, существует последовательность $\{a_n\}$, такая что $K = \overline{\{a_n\}}$. Далее следует применить задачу 10.6.

10.8. Пусть $A : C^1[a, b] \to C[a, b]$ — оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$. Определить норму оператора A, если в $C^1[a, b]$ норма определяется равенством $||x||_1 = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|$.

Решение. Пусть $||y||_2$ — норма элемента y в пространстве $C[a, b]$. Тогда $||Ax||_2 \leq ||x||_1$. С другой стороны, если $x_n(t) = \sin(nx)$, то для достаточно больших n имеем $||x_n||_1 = 1 + n$, $||Ax_n||_2 = n$, поэтому $\lim_{n \to \infty} \frac{||Ax_n||_2}{||x_n||_1} = 1$. Значит $||A|| = 1$.

10.9. Пусть оператор $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$ определен соотношением $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$. Показать, что спектр оператора A состоит из единственной точки, не являющейся собственным значением оператора A.

Решение. Пусть $\lambda \neq 0$. Тогда для любого $y \in C[0, 1]$ уравнение $Ax - \lambda x = y$ имеет единственное решение $x(t)$ в классе $C[0, 1]$ (см. зад. 5.34). По теореме Банаха об обратном операторе получаем, что оператор R_λ ограничен при $\lambda \neq 0$.

Рассмотрим $\lambda = 0$. Уравнение $\int_0^t x(s)ds = 0$ имеет только нулевое решение, поэтому точечный спектр оператора A пуст. Так как образ оператора A содержится в собственном подпространстве $\{y(t) \in C[0, 1], y(0) = 0\}$, то значение $\lambda = 0$ принадлежит остаточному спектру оператора A.[1]

[1]Регулярность всех ненулевых значений λ можно также получить, используя формулу для спектрального радиуса.

10.10. Пусть $K(t,s) \in C([a,b] \times [a,b])$ и последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ удовлетворяют соотношениям $a \le a_n \le b_n \le b$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Рассмотрим операторы $A, A_n : C[a,b] \to C[a,b]$, $Ax = \int_a^b K(t,s)x(s)ds$, $A_n(x) = \int_{a_n}^{b_n} K(t,s)x(s)ds$. Показать, что последовательность $\{A_n\}$ равномерно сходится к A.

Решение. Пусть $M = \max_{t,s\in[a,b]} |K(t,s)|$. Для любого $x \in C[a,b]$ имеем $||A_n(x) - A(x)|| \le M||x||(a_n - a + b - b_n)$, отсюда $||A_n - A|| \le M(a_n - a + b_n - b) \to 0$ при $n \to \infty$.

10.11. Исследовать на равномерную, сильную и слабую сходимость последовательность операторов A_n в пространстве l_2:

а) $A_n(x_1, \dots, x_k, \dots) = (x_1/n, \dots, x_k/n, \dots)$

б) $A_n(x_1, x_2, \dots) = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ **(первые n координат образа равны нулю).**

в) $A_n(x_1, x_2, \dots) = (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ **(первые n координат образа равны нулю).**

Решение. а) $||A_n|| = \frac{1}{n}$, отсюда следует равномерная сходимость последовательности A_n к нулевому оператору.

б) Рассмотрим $x = (x_1, x_2, \dots) \in l_2$ и произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер N, такой что $\sum_{n=k}^{\infty} x_k^2 < \varepsilon^2$ при $k > N$. Поэтому $||A_k(x)|| < \varepsilon$ при $k > n$, откуда следует сильная сходимость последовательности A_n к нулевому оператору. Однако $||(A_n - A_{n+1})(e_{n+1})|| = 1$, значит $||A_n - A_{n+1}|| \ge 1$ для любого n, поэтому последовательность $\{A_n\}$ не сходится равномерно.

в) Последовательность $\{A_n\}$ не сходится сильно, так как при $x = e_1$ имеем $||A_n(x) - A_{n+1}(x)|| = \sqrt{2}$. Последовательность A_n сходится слабо так как для любого $y = (y_1, y_2, \dots) \in l_2$ и для любого $x \in l_2$ имеем $|(y, A_n(x))| \le ||x||\sqrt{\sum_{j=n}^{\infty} y_j^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

10.12. Найти оператор A', сопряженный к оператору $A \in \mathcal{L}(l_1, l_1)$, где $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Найти спектр оператора A'.

Решение. Пусть $g \in l_1^*$. Тогда существует $(g_1, g_2, \dots) \in l_\infty$: $g(y_1, y_2, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j y_j$ для любой последовательности $(y_1, y_2, \dots) \in l_1$. Отсюда

$$A'g(x_1, x_2, \dots) = g(A(x_1, x_2 \dots)) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j x_{j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} f_j x_j,$$

где $f_1 = 0$, $f_j = g_{j-1}$, $j \ge 2$.

Отождествляя l_1^* с l_∞, получаем, что $A'(g_1, g_2, \dots) = (0, g_1, g_2, \dots)$, $||A'|| = 1$, оператор A' собственных значений не имеет, точки множества $|\lambda| > 1$ являются регулярными.

Пусть $|\lambda| \le 1$. Покажем, что замыкание образа оператора $A' - \lambda E$ не совпадает с l_∞. Если $\lambda = 0$, то образ оператора $A' - \lambda E$ содержится в замкнутом подпространстве $x \in l_\infty : x_1 = 0$. Если $\lambda \ne 0$, то при фиксированном $h = (h_1, h_2, \dots)$, уравнение $A'g - \lambda g = h$, $g = (g_1, g_2, \dots)$, имеет единственное формальное решение $g_1 = -\frac{h_1}{\lambda}$, $g_n = -\frac{1}{\lambda^n}(h_1 + h_2\lambda + \dots + h_n\lambda^{n-1})$, $n \in \mathbf{N}$. Покажем, что множество $\{h \in l_\infty : |h_j - \overline{\lambda^{j-1}}| < \frac{1}{2}\}$ не содержится в образе оператора $A' - \lambda E$. Действительно, пусть $h_j = \overline{\lambda^{j-1}} + \delta_j$, где $\sup_j |\delta_j| \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$|g_n| = \frac{1}{|\lambda|^n}\left|\sum_{j=1}^{n}(|\lambda|^{2j-2} + \lambda^{j-1}\delta_j)\right| \geq \frac{1}{|\lambda^n|}\sum_{j=1}^{n}(|\lambda|^{2j-2} - \frac{1}{2}|\lambda|^{j-1}).$$

Если $|\lambda| = 1$, то $|g_n| \geq \frac{n}{2}$, следовательно $g \notin l_\infty$. Если $|\lambda| < 1$, то

$$\sum_{j=1}^{n}(|\lambda|^{2j-2} - \frac{1}{2}|\lambda|^{j-1}) = \frac{1-|\lambda|^{2n}}{1-|\lambda|^2} - \frac{1-|\lambda|^n}{2-2|\lambda|} = \frac{1-|\lambda|^n}{1-|\lambda|}(\frac{1+|\lambda|^n}{1+|\lambda|} - \frac{1}{2}) \geq \frac{1-|\lambda|^n}{2(1+|\lambda|)}.$$

Отсюда $|g_n| \geq \frac{1}{|\lambda|^n}\frac{1-|\lambda|^n}{2(1+|\lambda|)} \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому спектр оператора A' является остаточным и совпадает с множеством $|\lambda| \leq 1$.

10.13. Показать, что спектр унитарного оператора лежит на единичной окружности.

Решение. Пусть H — гильбертово пространство. Напомним, что оператор $U \in \mathcal{L}(H, H)$ называется унитарным, если $U^* = U^{-1}$. Поскольку $||Ux||^2 = (Ux, Ux) = (x, U^*Ux) = ||x||^2$, то $||U|| = 1$. Отсюда $\sigma(U) \subset \{|\lambda| \leq 1\}$. Так как U обратим, то $0 \notin \sigma(U)$.

Пусть $0 < |\lambda| < 1$. Тогда $U - \lambda E = \lambda U(\lambda^{-1}E - U^{-1})$. Так как оператор U^{-1} является унитарным, то оператор $\lambda^{-1}E - U^{-1}$ обратим, а значит и оператор $U - \lambda E$ обратим. Поэтому $\{0 < |\lambda| < 1\} \notin \sigma(U)$.

10.14. В пространстве $\mathcal{L}(L_2(\mathrm{R}), L_2(\mathrm{R}))$ рассмотрим оператор A_t : $A_t f(x) = f(x+t)$.

1. Найти норму оператора A_t.

2. Показать, что отображение $\Phi : \mathrm{R} \to \mathcal{L}(L_2(\mathrm{R}), L_2(\mathrm{R}))$, $\Phi(t) = A_t$ разрывно в каждой точке $t \in \mathrm{R}$.

3. Показать, что пространство $\mathcal{L}(L_2(\mathrm{R}), L_2(\mathrm{R}))$ несепарабельно.

Решение. 1. $||A_t(f)|| = \sqrt{\int |f^2(x+t)|dx} = \sqrt{\int |f^2(x)|dx} = ||f||$, следовательно $||A|| = 1$.

2. Пусть $t, s \in \mathrm{R}$, $t \neq s$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, |x| \leq |t-s|/2, \\ 0, |x| > |t-s|/2. \end{cases}$$

Тогда $||f|| = \sqrt{|t-s|}$, $||(A_t - A_s)(f)|| = \sqrt{\int |f(x+t) - f(x+s)|^2 dx} = \sqrt{2|t-s|}$, поэтому

$$(*) \qquad ||A_t - A_s|| \geq \sqrt{2},$$

и отображение Φ разрывно в каждой точке.

3. Следует из (*) и задачи 8.2.

10.15. Пусть

$$K(s,t) = \begin{cases} (1-s)t, 0 \leq t \leq s, \\ (1-t)s, s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Найти собственные функции и собственные значения оператора $A \in \mathcal{L}(L_2[0,1], L_2[0,1])$, $Af(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)dt$.

Решение. Имеем

$$Ag(s) = (1-s)\int_0^s tg(t)dt + s\int_s^1 (1-t)g(t)dt.$$

Если функция $g \in L_2[0,1]$, то $Ag \in C[0,1]$ в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Так как оператор A задается собственным интегралом, зависящим от параметра, то $Ag \in C^1[0,1]$ при $g \in C[0,1]$, причем

$$(Ag)'(s) = \int_s^1 g(t)dt - \int_0^1 tg(t)dt.$$

Аналогично получаем, что если $g \in C^1[0,1]$, то $Ag \in C^2[0,1]$ и

$$(Ag)''(s) = -g(s).$$

Рассмотрим теперь уравнение $Af = \lambda f$. Согласно сказанному выше, $f \in C^2[0,1]$ и

$$\lambda f''(s) + f(s) = 0$$

Учитывая, что все решения уравнения $Af = \lambda f$ удовлетворяют условиям $f(0) = f(1) = 0$, получаем, что уравнение $Af = \lambda f$ имеет ненулевые решения $\iff$ $\lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$, $k \in \mathbf{N}$ и для этих λ решения уравнения пропорциональны функции $f_k(x) = \sin(\pi k x)$.

10.16. Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X,X)$, пространство X банахово.

а) Верно ли, что если оператор $B = A_1A_2$ обратим, то операторы A_1, A_2 также обратимы?

б) Доказать, что если операторы A_1 и A_2 перестановочны, то B обратим тогда и только тогда, когда A_1 и A_2 обратимы.

Решение. а) Неверно, например $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$, $A_1(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$, $A_2(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$.Тогда B — тождественный оператор, хотя оба оператора A_1, A_2 необратимы.

б) Если A_1 и A_2 обратимы, то $B^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Пусть B обратим. Тогда B и B^{-1} перестановочны с A_1 и A_2.

Так как $B = A_1A_2$, то $(B^{-1}A_1)A_2 = E$. С другой стороны, $E = A_1A_2B^{-1} = A_2A_1B^{-1} = A_2(B^{-1}A_1)$, значит A_2 обратим. Аналогично доказывается обратимость A_1.

10.17. Доказать, что не существует двух операторов $A, B \in \mathcal{L}(X,X)$ для которых $AB - BA = E$ (X — линейное нормированное пространство).

Решение. Предположим, что $AB - BA = E$. Покажем, используя индукцию, что

(1)
$$A^nB - BA^n = nA^{n-1}$$

для любого $n \in \mathbf{N}$. При $n = 1$ утверждение справедливо. Пусть (1) справедливо при $n = k - 1$. Тогда

(2) $$A^k B - ABA^{k-1} = A(A^{k-1}B - BA^{k-1}) = (k-1)A^{k-1}.$$

С другой стороны

(3) $$ABA^{k-1} - BA^k = (AB - BA)A^{k-1} = A^{k-1}.$$

Складывая (2) и (3), получаем, что (1) справедливо при $n = k$.

Таким образом $n||A^{n-1}|| = ||A^n B - BA^n|| \le 2||B|| \cdot ||A^n|| \le 2||B|| \cdot ||A|| \cdot ||A^{n-1}||$, $n \in \mathbf{N}$. Отсюда либо $||B|| \cdot ||A|| \ge n/2$, либо $A^{n-1} = 0$.

Предположим, что $A^{n-1} = 0$. Взяв в (1) $n - 1$ вместо n, затем $n - 2$ вместо $n - 1$ и т.д. последовательно получаем $A^{n-2} = 0$, $A^{n-3} = 0$, $\dots$, $A = 0$, что противоречит $AB - BA = E$.

Поэтому $||B|| \cdot ||A|| \ge n/2$ для любого $n \in \mathbf{N}$, что также невозможно.

10.18. Рассмотрим соотношения $y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj} x_j$, $n \in \mathbf{N}$. Найти необходимые и достаточные условия на матрицу $||a_{nj}||$ при которых оператор A, действующий по правилу $A(x_1, x_2, \dots) = (y_1, y_2, \dots)$ является линейным и непрерывным

а) в пространстве c_0,

б) в пространстве l_1.

Найти норму оператора A в каждом из пространств.

Решение. а) Пусть $A \in \mathcal{L}(c_0, c_0)$. Так как $A(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj}, \dots)$,[2], то

(1) $$\lim_{n \to \infty} a_{nj} = 0, j \in \mathbf{N}.$$

Поскольку для любого $n \in \mathbf{N}$ соотношение $f_n(y_1, \dots, y_n, \dots) = y_n$ задает линейный непрерывный функционал нормы 1, суперпозиция $f_n \cdot A$ принадлежит c_0^*, следовательно (см. задачу 9.3) $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| = ||f_n \cdot A||$. Так как $||f_n \cdot A|| \le ||A||$, получаем

(2) $$C = \sup_n \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}| \le ||A|| < \infty.$$

Теперь покажем, что если справедливо (1) и $C < \infty$, то $A \in \mathcal{L}(c_0, c_0)$ и $||A|| = C$. Пусть $x \in c_0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists J$: $|x_j| < \frac{\varepsilon}{2C}$, $j > J$. Согласно (1) для достаточно больших n при $1 \le j \le J$ имеем $|a_{nj}| < \frac{\varepsilon}{2||x||}$ ($||x|| = \sup_j |x_j|$). Отсюда $|y_n| < \varepsilon$ для достаточно больших n, т.е. $y \in c_0$. Поскольку $C < \infty$, $|y_n| \le C||x||$ при $n \in \mathbf{N}$, поэтому $||y|| \le C||x||$, значит оператор A является непрерывным и $||A|| \le C$. Учитывая (2), получаем $||A|| = C$.

б) Пусть $A \in \mathcal{L}(l_1, l_1)$. Так как $A(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj}, \dots)$, то

(3) $$||A(e_j)|| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nj}| \le ||A||.$$

[2]здесь, как и прежде, $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, единица стоит на j-м месте

Обратно, пусть $C = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |a_{nj}| < \infty$. Покажем, что $A \in \mathcal{L}(l_1, l_1)$ и $\|A\| = C$. Так как $|y_n| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}||x_j|$, $n \in \mathbf{N}$, то

$$\sum_{n=1}^{k} |y_k| \leq \sum_{n=1}^{k} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{nj}||x_j| = \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j| \sum_{n=1}^{k} |a_{nj}|) \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} C|x_j| = C\|x\|.$$

(здесь $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$). Отсюда $\|y\| \leq C\|x\|$, значит $A \in \mathcal{L}(l_1, l_1)$ и $\|A\| \leq C$. Учитывая (3), получаем $\|A\| = C$.

10.19. Найти оператор A', сопряженный к оператору A, определенному в задаче 10.18 а).

Решение. Пусть $f \in c_0^*$. Тогда $\exists (f_1, f_2, \dots) \in l_1$: $\forall y = (y_1, y_2, \dots) \in c_0$ верно $f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n$. Поэтому

$$f(Ax) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f_n a_{nj} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n a_{nj} x_j = \sum_{j=1}^{\infty} g_j x_j, \tag{*}$$

где $g_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} f_n$. Суммы в (*) можно менять местами, так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |f_n a_{nj} x_j| \leq \|A\| \cdot \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| < \infty.$$

Отсюда $A'(f) = g = (g_1, g_2, \dots)$, то есть матрица оператора A' получается транспонированием матрицы оператора A.

10.20. Пусть $A \in \mathcal{L}(H, H)$, где H — сепарабельное гильбертово пространство. Доказать, что A является компактным оператором тогда и только тогда, когда он переводит любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся последовательность.[3]

Решение. Необходимость следует из утверждения 7. Докажем достаточность. Рассмотрим ограниченное множество $M \subset H$. Тогда $M \subset \{\|x\| \leq R\}$ для достаточно большого R. Возьмем любую последовательность $\{Ax_n\} \subset A(M)$. В силу слабой компактности единичного шара (см. задачу 9.22), из последовательности $\{x_n/R\}$ можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}/R\}$, поэтому и сама подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ слабо сходится к некоторому элементу $x_0 \in H$. Так как для любого $z \in H$ верно

$$(Ax_{n_k}, z) = (x_{n_k}, A^*z) \to (x_0, A^*z) = (Ax_0, z), k \to \infty,$$

то $\{Ax_{n_k}\}$ слабо сходится к Ax_0. Поскольку $\{Ax_{n_k}\}$ сходится, то $A(x_{n_k})$ сходится к $A(x_0)$, значит множество $A(M)$ относительно компактно.

[3] Эта и следующая задачи справедливы и в произвольном гильбертовом пространстве (см. замечание к задаче 9.22).

10.21. Пусть $A \in \mathcal{L}(H, H)$, где H — сепарабельное гильбертово пространство. Доказать, что условие (*): если $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0 и $\{y_n\}$ слабо сходится к y_0, то $\lim_{n\to\infty}(Ax_n, y_n) = (Ax_0, y_0)$ $(x_n, y_n, x_0, y_0 \in H)$ является необходимым и достаточным для того, чтобы оператор A был компактным.

Решение. Пусть A компактен, $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0 и $\{y_n\}$ слабо сходится к y_0. Согласно задаче 9.18 существует $C > 0$ такое, что $||y_k|| \leq C$ при $k \in \mathbf{N}$. Поэтому $|(Ax_n, y_n) - (Ax_0, y_0)| \leq |(Ax_n - Ax_0, y_n)| + |(Ax_0, y_n - y_0)| \leq C||Ax_n - Ax_0|| + |(Ax_0, y_n - y_0)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Пусть теперь выполнено условие (*) и $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0. Возьмем $y_n = Ax_n$. Аналогично задаче 10.20, $\{Ax_n\}$ слабо сходится к Ax_0. Отсюда $(Ax_n, Ax_0) \to (Ax_0, Ax_0)$, и, в силу (*), $\lim_{n\to\infty}(Ax_n, Ax_n) = (Ax_0, Ax_0)$. Таким образом, $||Ax_n - Ax_0||^2 = (Ax_n, Ax_n) + (Ax_0, Ax_0) - (Ax_n, Ax_0) - (Ax_0, Ax_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

10.22. Доказать, что конечномерный оператор A в банаховом пространстве X является компактным.

Решение. Пусть $M \subset X$ — ограниченное множество. Тогда $A(M)$ — ограниченное множество в конечномерном пространстве, значит $A(M)$ относительно компактно.

10.23 Пусть банахово пространство X разлагается в прямую сумму своих замкнутых подпространств Y и Z, то есть $\forall x \in X$ $\exists!$ $y \in Y$, $z \in Z$: $x = y + z$. Показать, что:

1. Соотношение $P(x) = y$ определяет линейный непрерывный оператор $P : X \to X$, причем $P^2 = P$. Определенный таким образом оператор P называется проектором на Y вдоль Z. Если X — гильбертово пространство и $Y \perp Z$, то P называется ортогональным проектором.

2. Показать, что если $P \in \mathcal{L}(X, X)$ и $P^2 = P$, то существуют замкнутые подпространства Y и Z, такие что P является ортогональным проектором на Y вдоль Z.

3. Пусть X — гильбертово пространство, $P \in \mathcal{L}(X, X)$, $P^2 = P$. Показать, что P является ортогональным проектором $\iff$ P — самосопряженный оператор.

Решение. 1. Очевидно, что P — линейный оператор и $P^2 = P$. Проверим, что оператор P непрерывен. Согласно результату задачи 10.1, достаточно показать, что если $x_n \to x$ и $Px_n \to y$, то $Px = y$. Так как X и Y — банаховы пространства и $y_n = Px_n \in Y$, то $x \in X$, $y \in Y$. Так как $z_n = x_n - y_n \in Z$ и $z_n \to z = x - y$, то $z \in Z$. Отсюда $x = y + z$, $y \in Y$, $z \in Z$, значит $Px = y$.

2. Пусть $Z = KerP$, $Y = ImP$. Так как P непрерывен, то Z — замкнутое подпространство. Если $y \in Y$, то $\exists x \in X : y = Px$. Поэтому $Py = P^2x = Px = y$. Пусть $y_n \in Y$, $n \in \mathbf{N}$ и $y_n \to y$. Так как $y_n = Py_n \to Py$, то $y = Py$, в частности $y \in Y$ и тем самым пространство Y замкнуто. Если $v \in Y \cap Z$, то $v = Pv = 0$. Для любого $x \in X$ положим $y = Px$, $z = x - Px$. Тогда $y \in Y$, $Pz = Px - P^2x = 0$, поэтому $z \in Z$.

3. Согласно 2., P является проектором на Y вдоль Z, где $Z = KerP$, $Y = ImP$.

Пусть $P = P^*$. Если $z \in Z$, $y \in Y$, то $(y, z) = (Py, z) = (y, Pz) = (y, 0) = 0$.

Обратно. Так как $P^* = (P^2)^* = (P^*)^2$, то P^* — проектор, поэтому

$$(*) \qquad X = KerP^* \oplus ImP^* = KerP \oplus ImP.$$

Если $y \in ImP^*$, $z \in KerP$, то $\exists x \in X$: $y = P^*x$ и $(y, z) = (P^*x, z) = (x, Pz) = 0$. Таким образом $KerP \perp ImP^*$. Аналогично $KerP^* \perp ImP$. Учитывая $(*)$ и условие $KerP \perp ImP$, получаем $KerP^* = KerP$, $ImP^* = ImP$. Поскольку P и P^* проекторы, то $P = P^*$.

10.24. Пусть $\{f_1, \dots f_n\}$ и $\{g_1, \dots, g_n\}$ — линейно независимые системы функций в $L_2[0,1]$. Определим оператор A формулой[4]

$$(1) \qquad A\phi(t) = \sum_{j=1}^{n} (g_j, \phi) f_j(t).$$

Показать, что $A \in \mathcal{L}(L_2[0,1], L_2[0,1])$ и что A является проектором $\iff (f_k, g_j) = \delta_{jk}$, $1 \leq j, k \leq n$.

Решение. Пусть $K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t) g_j(s)$. Тогда $A\phi(t) = \int_0^1 K(t,s)\phi(s)ds$ и, например, согласно утверждению 9, $A \in \mathcal{L}(L_2[0,1], L_2[0,1])$.

Предположим, что A — проектор. Пусть $\phi_k \in \mathcal{L}in(g_1, \dots, g_n)$: $(\phi_k, g_j) = \delta_{jk}$, $1 \leq k, j \leq n$. Тогда $A\phi_k(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\delta_{kj} = f_k(t)$, $A^2\phi_k(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)(f_k, g_j)$. Так как A — проектор, то $A^2 = A$, в частности $A(\phi_k) = A^2(\phi_k)$, значит $(f_k, g_j) = \delta_{jk}$ в силу линейной независимости системы $f_1, \dots, f_n$.

Обратно, пусть $(f_k, g_j) = \delta_{jk}$, $1 \leq j, k \leq n$. Тогда при $\phi \in L_2[0,1]$ имеем

$$A^2\phi = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)(g_j, A\phi) = \sum_{j=1}^{n} f_j(t)\left(\sum_{k=1}^{n} (g_j, f_k)(g_k, \phi)\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} f_j(t)(g_j, \phi) = A\phi.$$

Согласно задаче 10.23, A является проектором.

10.25. Пусть $X = Y \oplus Z$, X — банахово пространство, Y, Z — замкнутые подпространства пространства X, P — проектор на Y вдоль Z. В каком случае оператор P будет компактным?

Решение. P будет компактным тогда и только тогда, когда Y — конечномерное подпространство. Действительно, если $\dim Y < \infty$, то P компактен согласно задаче 10.22. Если же $\dim Y = \infty$, то образ $P(B)$ единичного шара $B = \{\|x\| \leq 1, x \in X\}$ является единичным шаром в Y, а значит множество $P(B)$ не является относительно компактным (см. задачу 8.15).

10.26. Пусть A — интегральный оператор в $L_2[0,1]$, то есть $A\phi(t) = \int_0^1 K(t,s)\phi(s)ds$, где $K \in L_2([0,1] \times L_2[0,1])$. Показать, что если A является проектором, то A удовлетворяет условию задачи 10.24.

Решение. Согласно утверждению 9, оператор A компактен, поэтому, если A является проектором, то ImA конечномерен (см. задачу 10.25). Пусть

[4] (g_j, ϕ) — скалярное произведение в $L_2[0,1]$

$f_1, \dots f_n$ — линейно независимые функции в $L_2[0,1]$, порождающие ImA. При $1 \le j \le n$ рассмотрим $\psi_j \in ImA$, такие что $(\psi_j, f_k) = \delta_{jk}$, $1 \le k \le n$. Пусть $\phi \in L_2[0,1]$. Тогда $A\phi = \sum_{j=1}^n c_j(\phi) f_j$. Так как оператор A ограничен, то при $1 \le j \le n$ соотношение $F_j(\phi) = (A\phi, \psi_j) = c_j(\phi)$ задает линейный непрерывный функционал на $L_2[0,1]$. Поэтому существуют $g_1, \dots, g_n \in L_2[0,1]$, такие что $c_j(\phi) = (g_j, \phi)$. Следовательно

$$A\phi = \sum_{j=1}^n (g_j, \phi) f_j.$$

Проверим, что функции $g_1, \dots, g_n$ линейно независимы. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$: $g_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j g_j$. Тогда

$$A\phi = \sum_{j=1}^{n-1} (g_j, \phi)(f_j + \alpha_j f_n),$$

поэтому $ImA \in \mathcal{L}in(f_1 + \alpha_1 f_n, \dots, f_{n-1} + \alpha_{n-1} f_n)$, что противоречит $dimImA = n$.

Далее следует применить задачу 10.24.

10.27. Является ли компактным оператор $A \in \mathcal{L}(C[0,1], C[0,1])$, если:

а) $Ax(t) = x(a) + tx(b)$,

б) $Ax(t) = t^2 x(t)$.

Решение. а) Будет, так как является конечномерным. б) Не будет. Рассмотрим $M = \{t^n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Множество M ограничено. Последовательность $A(M) = \{t^{n+2}\}$ сходится поточечно к разрывной функции, поэтому из нее нельзя выделить никакой равномерно сходящейся подпоследовательности, следовательно множество $A(M)$ не является относительно компактным.

10.28. Оператор $A \in \mathcal{L}(l_2, l_2)$ определен соотношениями

$$A(x_1, \dots, x_n, \dots) = (a_1 x_1, \dots, a_n x_n, \dots).$$

При каких условиях на последовательность $\{a_n\}$ оператор A будет компактным?

Решение. Оператор A компактен если и только если образ единичного шара $B = \{||x|| \le 1, x \in l_2\}$ относительно компактен. Используя критерий относительной компактности в l_2, получаем, что A компактен $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $\sum_{j=N}^\infty |a_j|^2 |x_j|^2 < \varepsilon^2$ при $||x|| = \sqrt{\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2} \le 1$. Беря $x = e_j$, получаем $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Обратно, пусть $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$. Тогда $\sum_{j=N}^\infty |a_j|^2 |x_j|^2 \le \sup_{j \ge N} |a_j|^2 \to 0$ при $N \to \infty$, поэтому A — компактный оператор.

10.29. Пусть $A \in \mathcal{L}(X, X)$ — компактный оператор в банаховом пространстве X. Верно ли, что:

а) точка 0 является собственным значением оператора A,

б) $0 \in \sigma(A)$.

Решение. а) Неверно. Рассмотрим, например оператор

$$A \in \mathcal{L}(C[0,1], C[0,1]), Ax(t) = \int_0^t x(s)ds.$$

Согласно задаче 10.9, 0 не является собственным значением оператора A. Проверим, что A компактен. Достаточно показать, что образ $A(B)$ единичного шара $B = \{x \in C[0,1], ||x|| \le 1\}$ относительно компактен. Для любого $x \in B$ имеем $||Ax|| \le 1$ и $|Ax(t_1) - Ax(t_2)| \le |t_1 - t_2|$, поэтому множество $A(B)$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным, а значит и относительно компактным.

б) Верно, так как в противном случае оператор A был бы обратим и множество $M = A^{-1}(B)$ являлось бы ограниченным в то время как множество $A(M) = B$ не является относительно компактным.

10.30. Верно ли, что компактный оператор A отображает замкнутый единичный шар $B = \{||x|| \le 1\}$ в компактное множество, если:

а)$A \in \mathcal{L}(X, X)$, X — банахово пространство

б) $A \in \mathcal{L}(H, H)$, H — сепарабельное гильбертово пространство.

Решение. а) Неверно, например оператор $A \in \mathcal{L}(C[0,1], C[0,1])$, $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$ компактен (см. задачу 10.29), но образ единичного шара не компактен (см. задачу 8.23 г)).

б) Верно. Пусть $\{y_n\} \in A(B)$. Возьмем $x_n \in A^{-1}(y_n) \cap B$. В силу слабой компактности шара B (см. задачу 9.22) существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ слабо сходящаяся к $x_0 \in B$. Из утверждения 7 имеем $\lim_{n\to\infty} y_{n_k} = y_0 = A(x_0) \in A(B)$, что доказывает компактность $A(B)$.[5]

10.31. Пусть $A \in \mathcal{L}(H, H)$, H — сепарабельное гильбертово пространство. Верно ли, что существует $x \in H$, $||x|| = 1$, такой что $||Ax|| = ||A||$, если

а) A — компактный оператор,

б) A — самосопряженный оператор.

Решение. а) Верно. Пусть $\{x_n\} \in H$, $||x_n|| \le 1$ и $\lim_{n\to\infty} ||Ax_n|| = ||A||$. В силу слабой компактности шара $B = \{||x|| \le 1\}$ (см. задачу 9.22) существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ слабо сходящаяся к $x_0 \in B$. Так как A компактен, то $\lim_{n\to\infty} Ax_{n_k} = Ax_0$, отсюда $||Ax_0|| = \lim_{n\to\infty} ||Ax_{n_k}|| = ||A||$. Отметим, что $||x_0|| = 1$, так как $||A|| = ||Ax_0|| \le ||A|| \cdot ||x_0||$ (при $A = 0$ утверждение очевидно).

б) Неверно. Пусть $H = l_2$, $A(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_1/2, \dots, nx_n/(n+1), \dots)$. Учитывая задачу 10.6 б) получаем, что $||A|| = 1$. Но $||Ax|| = ||x||$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

10.32. В пространстве $L_2[0,1]$ задан оператор A, $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$. Доказать, что A — компактный оператор, найти $||A||$.

Решение. $Ax(t) = \int_0^1 K(t,s)x(s)ds$, где

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, 0 \le s \le t \\ 0, t \le s \le 1 \end{cases},$$

[5] Множество $A(B)$ будет компактным и в случае, если H является рефлексивным банаховым пространством.

поэтому A компактен согласно утверждению 9.

Найдем сперва $||A^*A||$, используя теорему Гильберта-Шмидта. Так как $A^*y(t) = \int_0^1 K(s,t)y(s)ds = \int_t^1 y(s)ds$, то

$$A^*Ax(t) = \int_0^1 x(s)ds - \int_t^1 sx(s)ds - t\int_0^t x(s)ds,$$

A^*A — компактный оператор. Предположим, что

$$A^*Ax(t) = \lambda x(t). \tag{1}$$

Дважды продифференцировав уравнение (1), получим, что $\lambda x(t) \in C^2[0,1]$ и

$$\lambda x''(t) + x(t) = 0. \tag{2}$$

Решениями уравнения (2), удовлетворяющими (1), с точностью до пропорциональности, являются функции $f_k(t) = \cos(k+1/2)\pi t$ а отвечающие им собственные значения равны $\frac{1}{\pi^2(k+1/2)^2}$. Наибольшее из них равно $\frac{4}{\pi^2}$. В силу теоремы Гильберта-Шмидта, $||A^*A|| = \frac{4}{\pi^2}$.

Так как $||A|| = \sqrt{||A^*A||}$, то $||A|| = \frac{2}{\pi}$.

10.33. Оператор A определен соотношением $Ax(t) = \frac{1}{t}\int_0^t x(t)dt$. Показать, что $A \in \mathcal{L}(L_2(0,\infty), L_2(0,\infty))$ и A не компактен.

Решение. Покажем, что A ограничен. Пусть $x \in L_2(0,\infty)$, $y = Ax$. Так как $|y(t)| \le \frac{1}{t}\sqrt{\int_0^t |x(s)|^2 ds}\sqrt{t} \le \frac{||x||}{\sqrt{t}}$ в силу неравенства Коши-Буняковского, то $y \in L_2[\varepsilon, L]$ при $0 < \varepsilon < L < \infty$. Пусть $I(\varepsilon, L) = \sqrt{\int_\varepsilon^L (\frac{1}{t}\int_0^t |x(s)|ds)^2 dt}$. Тогда $I(\varepsilon, L) \ge \sqrt{\int_\varepsilon^L |y(t)|^2 dt}$. Интегрируя по частям, получаем

$$I^2(\varepsilon, L) = -\frac{1}{t}(\int_0^t |x(s)|ds)^2|_\varepsilon^L + 2\int_\varepsilon^L \frac{1}{t}(\int_0^t |x(s)|ds)|x(t)|dt.$$

Но $\frac{1}{\varepsilon}(\int_0^\varepsilon |x(s)|ds)^2 \le ||x||^2$. Также

$$2\int_\varepsilon^L \frac{1}{t}(\int_0^t |x(s)|ds)|x(t)|dt \le 2\sqrt{\int_\varepsilon^L \frac{1}{t^2}(\int_0^t |x(s)|ds)^2 dt}\sqrt{\int_\varepsilon^L |x(t)|^2 dt} \le$$

$$\le 2I(\varepsilon, L)||x||.$$

Таким образом $I^2(\varepsilon, L) \le ||x||^2 + 2I(\varepsilon, L)||x||$, значит $I(\varepsilon, L) \le (1+\sqrt{2})||x||$. Устремляя ε к нулю, а L к бесконечности, получаем, что $y \in L_2(0,\infty)$, $||y|| \le (1+\sqrt{2})||x||$ и $||A|| \le (1+\sqrt{2})$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n(t)\}$,

$$x_n(t) = \begin{cases} n, 0 < s < 1/n^2, \\ 0, s \ge 1/n^2. \end{cases}$$

Так как для любой функции $f \in L_2(0,\infty)$ верно

$$|(x_n, f)| = |n \int_0^{1/n^2} f(t)dt| \leq \sqrt{\int_0^{1/n^2} |f(t)|^2 dt} \to 0, n \to \infty,$$

то последовательность $\{x_n(t)\}$ слабо сходится к нулю. Но $Ax_n(t) = y_n(t) = n$ при $0 < t < 1/n^2$, поэтому $||y_n|| \geq 1$ и оператор A не компактен.[6]

10.34. В пространстве $L_2[0,1]$ решить относительно f уравнение $Af - \lambda f = g$, где $g \in L_2[0,1]$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t$, а оператор A определен в задаче 10.15.

Решение. Согласно задаче 10.15, функции $f_k(t) = \sin \pi k t$ являются собственными для оператора A, соответствующие им собственные значения равны $\lambda_k = \frac{1}{\pi^2 k^2}$. Так как оператор A компактный и самосопряженный, то система $\{\sqrt{2} f_k\}$ образует ортонормированный базис в $L_2[0,1]$.

Пусть $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\pi t$ — разложение f по системе $\{f_k\}$. Тогда уравнение $Af - \lambda f = g$ равносильно уравнению

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} ((\lambda_k - \lambda)a_k - b_k) f_k = 0.$$

Возможны три случая:

а) $\lambda \notin \{\lambda_k, 0\}$,

б) $\lambda = \lambda_k$ при некотором $k \in \mathbf{N}$,

в) $\lambda = 0$.

В случае а) имеем $a_k = \frac{b_k}{\lambda_k - \lambda}$, и, поскольку $\inf_k |\lambda_k - \lambda| > 0$, то $f \in L_2[0,1]$ в силу равенства Парсеваля.

В случае б) при $b_k = 0$ уравнение имеет бесконечно много решений $f = Cf_k + \sum_{j \neq k} \frac{b_j}{\lambda_j - \lambda_k} f_j$, где C — произвольная константа. Аналогично а), $f \in L_2[0,1]$. Если же $b_k \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

В случае в) имеем $a_k = \frac{b_k}{\lambda_k}$, уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{b_k}{\lambda_k}|^2 < \infty$, причем решение единственно.

10.35. Найти собственные функции ядра $K(t,s) = \cos(t+s)$ и решить уравнение

$$(1) \qquad x(t) = \int_0^{\pi} \cos(t+s)x(s)ds + 1$$

в пространстве $C[0,\pi]$.

Решение. Если f — собственная функция, отвечающая собственному значению λ, то

$$(*) \qquad \lambda f(t) = \cos t \int_0^{\pi} \cos s f(s)ds - \sin t \int_0^{\pi} \sin s f(s)ds,$$

поэтому $f(t) = A\cos t + B \sin t$, A, B — константы. Подставляя выражение для f в уравнение $(*)$, получаем, что $\lambda = \pm\pi/2$, $f(t) = A\cos t$ при $\lambda = \pi/2$, $f(t) = B\sin t$ при $\lambda = -\pi/2$.

Аналогично, если $x(t)$ — решение уравнения (1), то $x(t) = A\cos t + B\sin t + 1$, и, подставляя выражение для x в уравнение (1), получаем $x(t) = -\frac{4}{2+\pi}\sin t$.

[6] Аналогично показывается, что оператор A непрерывен, но не компактен в пространстве $L_2(0,L)$ для любого $L > 0$.

ГЛАВА XI. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

Определение 1. Функция $\phi(x)$, определенная на $\mathbf{R}^n$, называется *финитной*, если существует ограниченное множество, вне которого она равна нулю. *Носителем* финитной функции $\phi(x)$ называется множество $\operatorname{supp}\phi = \overline{\{x|\phi(x) \neq 0\}}$.

Совокупность финитных бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbf{R}^n$ образует линейное пространство, которое обозначается через D (или $D(\mathbf{R}^n)$).

Определение 2. Последовательность $\{\phi_n\}$ функций из D называется сходящейся к $\phi \in D$ ($\phi_k \to \phi$ в D), если:

1) существует шар B, вне которого все ϕ_k равны нулю,

2) последовательность частных производных $\{\frac{\partial^m \phi_k}{\partial x_1{}^{m_1} \ldots \partial x_n{}^{m_n}}\}$ сходится равномерно на $\mathbf{R}^n$ к $\{\frac{\partial^m \phi}{\partial x_1{}^{m_1} \ldots \partial x_n{}^{m_n}}\}$ $(m = m_1 + \cdots + m_n)$ для любого набора натуральных чисел $(m_1, \ldots m_n)$.

Пример 1. Функция

$$f_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, |x| < a, \\ 0, |x| \geq a. \end{cases}$$

принадлежит $D(\mathbf{R}^n)$. Здесь $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$, $a > 0$.

Следующее утверждение дает примеры многих других функций из пространства $D(\mathbf{R}^n)$.

Утверждение 1. Если область G ограничена и G_1 — область, такая что $\overline{G}_1 \subset G$, то существует функция $\eta \in D$, такая что $\operatorname{supp}\eta \subset G$, $0 \leq \eta \leq 1$ и $\eta(x) = 1$ при $x \in G_1$.

Определение 3. *Обобщенной функцией* называется всякий линейный непрерывный функционал на D. Значение функционала f на функции ϕ обозначается (f, ϕ).

Таким образом,

1) для любой функции $\phi \in D$ определено число (f, ϕ),

2) имеем $(f, \lambda\phi_1 + \mu\phi_2) = \lambda(f, \phi_1) + \mu(f, \phi_2)$ для любых $\phi_1, \phi_2 \in D$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$,

3) если $\phi_k \to \phi$ в D, то $(f, \phi_k) \to (f, \phi)$.

Обозначим пространство обобщенных функций через D' (или $D'(\mathbf{R}^n)$).

Определение 4. Измеримая функция на прямой называется *локально интегрируемой*, если она интегрируема относительно меры Лебега на каждом отрезке. Множество классов эквивалентности локально интегрируемых функций обозначается через L_1^{loc}.

Если $f \in L_1^{loc}$, то соотношение

$$(*) \qquad (f, \phi) = \int f(x)\phi(x)dx$$

определяет обобщенную функцию, которую мы также будем обозначать символом f.

Определение 5. Обобщенная функция называется *регулярной*, если она задается соотношением $(*)$ для некоторой локально интегрируемой функции f. В противном случае обобщенная функция называется *сингулярной*.

Определение 6. Последовательность $\{f_n\}$ пространства D' называется сходящейся к элементу $f \in D'$, если $\lim_{n\to\infty}(f_n, \phi) = (f, \phi)$ для любой $\phi \in D$.

Определение 7. Обозначим через $S = S(\mathbf{R}^n)$ линейное пространство всех функций $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Последовательность $\{\phi_k\} \subset S$ называется сходящейся к функции $\phi \in S$ в пространстве S, если для любых целых неотрицательных l, $m_1, \dots, m_n$ последовательность $\{|x|^l \frac{\partial^m(\phi_k - \phi)}{\partial {x_1}^{m_1} \dots \partial {x_n}^{m_n}}\}$ равномерно сходится к нулю на $\mathbf{R}^n$ $(m = m_1 + \dots + m_n)$.

Определение 8. *Обобщенной функцией медленного роста* называется любой линейный непрерывный функционал на S. Обобщенные функции медленного роста образуют линейное пространство, которое обозначается $S' = S'(\mathbf{R}^n)$. Последовательность $\{f_n\} \subset S'$ называется сходящейся к $f \in S'$, если $\lim_{k\to\infty}(f_k, \phi) = (f, \phi)$ для любой $\phi \in S$.

Действия над обобщенными функциями.

1. Для любых обобщенных функций $f, g \in D'$ (соответственно $f, g \in S'$) и чисел $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ определена линейная комбинация $\lambda f + \mu g \in D'$ (соответственно $\lambda f + \mu g \in S'$), причем

$$(\lambda f + \mu g, \phi) = \lambda(f, \phi) + \mu(g, \phi), \phi \in D.$$

(соответственно $\phi \in S$).

2. Пусть $x = Ay + b$, $\det A \neq 0$ — невырожденное преобразование пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда для любой обобщенной функции $f \in D'$ (соответственно $f \in S'$) определена обобщенная функция $f(Ay+b) \in D'$ (соответственно, $f(Ay+b) \in S'$) такая, что $(f(Ay + b), \phi) = \frac{1}{|\det A|}(f, \phi(A^{-1}(x - b)))$ для любой $\phi \in D$ (соответственно, для любой $\phi \in S$).

3. Для любой обобщенной функции $f \in D'$ и бесконечно дифференцируемой функции a определена обобщенная функция af такая, что $(af, \phi) = (f, a\phi)$ для любой $\phi \in D$.

4. Для любой $f \in D'(\mathbf{R}^n)$ (соответственно $f \in S'(\mathbf{R}^n)$) и любого $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_n)$, где числа $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ целые неотрицательные, определена производная $\partial^\alpha f \in D'$ (соответственно $\partial^\alpha f \in S'$), такая что

$$(\partial^\alpha f, \phi) = (-1)^{|\alpha|} \left(f, \frac{\partial^{|\alpha|} \phi}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}} \right)$$

для любой $\phi \in D(\mathbf{R}^n)$ (соответственно, для любой $\phi \in S(\mathbf{R}^n)$). Здесь $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Определение 9. Пусть $f \in D' = D'(\mathbf{R})$ (соответственно $f \in S' = S'(\mathbf{R})$). Обобщенная функция $g \in D'$ (соответственно $g \in S'$) называется первообразной функции f, если $g' = f$.

Любая обобщенная функция имеет единственную, с точностью до аддитивной постоянной, первообразную (см. задачу 11.10). В частности, общее решение уравнения $y' = 0$ в D' (соответственно в S') есть произвольная постоянная.

Определение 10. Пусть $\phi \in S = S(\mathbf{R})$. Функция[1]

$$F(\phi)(x) = \int \phi(t) e^{ixt} dt$$

называется *преобразованием Фурье функции* $\phi(x)$. Функция

$$F^{-1}(\phi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int \phi(t) e^{-ixt} dt$$

называется *обратным преобразованием Фурье функции* $\phi(x)$

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье переводят пространство S в себя взаимно однозначно. При этом $\phi(x) = F^{-1}(F(\phi))(x) = F(F^{-1}(\phi))(x)$ для любой $\phi \in S$.

Определение 11. *Преобразованием Фурье* обобщенной функции $f \in S'$ называется обобщенная функция $F(f)$, такая что $(F(f), \phi) = (f, F(\phi))$ для любой $\phi \in S$. *Обратным преобразованием Фурье* обобщенной функции $f \in S'$ называется обобщенная функция $F^{-1}(f)$, такая что $F^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} F(f)(-x)$ для любой $\phi \in S$.

Преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье переводят пространство S' в себя взаимно однозначно. При этом $f = F^{-1}(F(f)) = F(F^{-1}(f))$ для любой $f \in S'$.

Свойства преобразования Фурье.

1. Дифференцирование преобразования Фурье. Если $f \in S'$, $n \in \mathbf{N}$, то $(F(f))^{(n)}(x) = F((ix)^n f(x))$.

2. Преобразование Фурье производной. Пусть $f \in S'$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда $F(f^{(n)})(x) = (-ix)^n F(f)(x)$.

---

[1] в дальнейшем интегралы, в которых не указаны пределы интегрирования, считаем взятыми по всей оси

11.1. Рассмотрим функцию $f_a \in D(\mathbf{R})$ из примера 1. Положим $f_n(x) = \frac{1}{n} f_a(\frac{x}{n})$. Показать, что последовательность $\{f_n(x)\}$ стремится равномерно на всей прямой к нулю вместе со своими производными, однако не имеет предела в пространстве D.

Решение. Поскольку $f_a \in D$, то для любого $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$ существует $C_k > 0$ такое, что $|f_a^{(k)}(x)| \le C_k$ при $x \in \mathbf{R}$. Отсюда $|f_n^{(k)}(x)| = \frac{1}{n^{k+1}} |f_a^{(k)}(\frac{x}{n})| \le \frac{C_k}{n^{k+1}}$, что доказывает равномерное стремление последовательности $\{f_n^{(k)}\}$ к нулю при каждом $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

Так как $f_n(\frac{an}{2}) \ne 0$, то не существует интервала, вне которого все f_n равны нулю. Значит, $\{f_n\}$ не сходится к нулю в пространстве D.

11.2. Пусть $\phi \in D(\mathbf{R})$. Показать, что $\{(\frac{x}{n})^n \phi(x)\}$ сходится к нулю в пространстве $D(\mathbf{R})$.

Решение. Пусть $g_n(x) = (\frac{x}{n})^n$, а $(-\rho, \rho)$ — интервал, вне которого $\phi(x) = 0$. Тогда при $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $x \in (-\rho, \rho)$, имеем $|g_n^{(k)}(x)| \le (\frac{\rho}{n})^{n-k}$. Пусть $A_k = \max_{0 \le j \le k} \{\max_{x \in} |\phi^{(j)}(x)|\}$. Тогда $\max_{x \in} |\phi(x) g_n(x)| \le A_0 (\frac{\rho}{n})^n$, а при $k \in \mathbf{N}$ и $n > k$, получаем

$$|(g_n(x)\phi(x))^{(k)}| = |\sum_{l=0}^{k} C_k^l g_n^{(l)}(x) \phi^{(k-l)}(x)| \le$$

$$\le A_k \sum_{l=0}^{k} C_k^l \left(\frac{\rho}{n}\right)^{n-l} = A_k \left(\frac{\rho}{n}\right)^{n-k} \left(1 + \frac{\rho}{n}\right)^k,$$

что доказывает равномерное стремление последовательности $\{(g_n(x)\phi(x))^k\}$ к нулю при каждом $k \in \{0\} \cup \mathbf{N}$.

11.3. Пусть функция $f \in C(\mathbf{R})$ финитна и $\operatorname{supp} f \subset (-A, A)$. Показать, что функцию f можно равномерно на $\mathbf{R}$ приблизить функциями из пространства D, носители которых принадлежат интервалу $(-A, A)$.

Решение. Пусть $f_a \in D(\mathbf{R})$ — функция из примера 1. Положим $g_n(x) = C_n f_{1/n}(x)$, где постоянная C_n определена так, чтобы $\int g_n(x) dx = 1$. Положим также $\phi_n(x) = \int f(y) g_n(y - x) dy$. Так как $\phi_n(x)$ финитна и бесконечно дифференцируема, то $\phi_n(x) \in D$. По построению $\operatorname{supp} \phi_n \subset (-A, A)$ для достаточно больших n. Покажем, что $\lim_{n \to \infty} \max_{x \in} |f(x) - \phi_n(x)| = 0$. Действительно, так как $f(x) = \int f(x) g_n(y - x) dy$, то

$$f(x) - \phi_n(x) = \int (f(x) - f(y)) g_n(y - x) dy = \int_{x-1/n}^{x+1/n} (f(x) - f(y)) g_n(y - x) dy =$$

$$= (f(x) - f(\xi(x, n))) \int_{x-1/n}^{x+1/n} g_n(y - x) dy = (f(x) - f(\xi(x, n))),$$

где $\xi(x, n) \in [x - 1/n, x + 1/n]$. Далее следует воспользоваться равномерной непрерывностью функции $f(x)$ (как непрерывной и финитной) на $\mathbf{R}$.

11.4. Функционал $\delta \in D'(\mathbb{R})$, определяемый соотношением $(\delta, \phi) = \phi(0)$, называется δ-функцией. Показать, что δ-функция является сингулярной обобщенной функцией.

Решение. Предположим, что $(\delta, \phi) = \int f(x)\phi(x)dx$ для некоторой функции $f \in L_1^{loc}$ и любой функции $\phi \in D$. Рассмотрим последовательность $\{\phi_n\}$,

$$\phi_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-n^2|x|^2}}, |x| < \frac{1}{n}, \\ 0, |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Последовательность $\{f(t)\phi_n(t)\}$ сходится к нулю почти всюду на отрезке $[-1, 1]$, причем $|f(t)\phi_n(t)| \leq \frac{1}{e}|f(t)|$. Отсюда по теореме Лебега

$$(\delta, \phi_n) = \int f(x)\phi_n(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)\phi_n(x)dx \to 0$$

при $n \to \infty$. Однако $(\delta, \phi_n) = \phi_n(0) = \frac{1}{e}$. Противоречие.

11.5. Показать, что отображение $\mathcal{P}\frac{1}{x} : \phi \to v.p.\int \frac{\phi(x)}{x}dx$ определяет сингулярную обобщенную функцию.

Решение. Пусть $\phi \in D$ и $\operatorname{supp}\phi \subset [-R, R]$. Так как $v.p.\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x} = 0$, а функция

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}, x \neq 0, \\ \phi'(0), x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на $[-R, R]$, то определено $v.p.\int \frac{\phi(x)}{x}dx = \int_{-R}^{R} g(x)dx$.

Пусть $\{\phi_n\}$ сходится к нулю в D. Тогда существует отрезок $[-R, R]$, вне которого все ϕ_n равны нулю и последовательность $\{\phi'_n\}$ равномерно сходится к нулю на $[-R, R]$. Значит, последовательность

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{\phi_n(x)-\phi_n(0)}{x}, x \neq 0, \\ \phi'_n(0), x = 0 \end{cases}$$

равномерно сходится к нулю на $[-R, R]$, ибо $|g_n(x)| = |\phi'_n(\xi)|$, ξ лежит между 0 и x. Поэтому $(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \phi_n) = \int_{-R}^{R} g_n(x)dx \to 0$ при $n \to \infty$. Итак, проверено, что отображение $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ задает обобщенную функцию.

Покажем теперь, что обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ является сингулярной. Предположим от противного, что $(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \phi) = \int f(x)\phi(x)dx$ для некоторой функции $f \in L_1^{loc}$ и любой функции $\phi \in D$. Пусть $h(x) = f(x) - 1/x$. Заметим, что если $\phi \in D$ и $0 \notin \operatorname{supp}\phi$, то $\int h(x)\phi(x)dx = 0$. Рассмотрим отрезок $[a, t]$, $0 < a < t$ и последовательность $\{\phi_n\}$ функций из D, равных нулю вне отрезка $[a/2, 2t]$, сходящуюся почти всюду на $[a/2, 2t]$ к характеристической функции отрезка $[a, t]$ (такая последовательность существует в силу утверждения 1). Применяя, как и в задаче 11.4, к последовательности $\{h\phi_n\}$ теорему Лебега, получаем $\int_a^t h(x)dx = 0$. Поскольку a и t произвольные, то дифференцируя последнее равенство по верхнему пределу, получаем, что $h(t) = 0$ почти всюду на любом отрезке, содержащемся в $(0, +\infty)$. Рассматривая отрезки $[t, a]$, где $a < 0$, аналогично получаем, что $h(t) = 0$ почти всюду на любом отрезке, содержащемся в $(-\infty, 0)$. Таким образом $h(t) = 0$ почти всюду на любом отрезке, что противоречит локальной интегрируемости функции $f(x)$.

11.6. Показать, что не существует обобщенной функции $f \in D'$, действующей на основные функции $\phi(x)$, обращающиеся в 0 в некоторой окрестности нуля, по формуле $(f, \phi) = \int e^{\frac{1}{x}} \phi(x) dx$.

Решение. Пусть

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-(x-1)^2}}, x \in [0, 2], \\ 0, x \in \mathbf{R} \setminus [0, 2]. \end{cases}$$

Пусть $\phi_n(x) = \phi(x - \frac{1}{n})$. Тогда последовательность ϕ_n сходится к ϕ в пространстве D. Если существует $f \in D'$, удовлетворяющая условию, то для достаточно больших n,

$$(f, \phi_n) = \int_{\frac{1}{n}}^{2+\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{1-(x-1-\frac{1}{n})^2}} dx = \int_0^2 e^{g(x)} dx \geq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} e^{g(x)} dx,$$

где $g(x) = \frac{1}{x+\frac{1}{n}} - \frac{1}{1-(x-1)^2}$. При $x \in [\frac{3}{n}, \frac{4}{n}]$, имеем $\frac{1}{x+\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{5}$, $\frac{1}{1-(x-1)^2} \leq \frac{1}{1-(\frac{3}{n}-1)^2} \leq \frac{2n}{11}$, $g(x) \geq \frac{n}{55}$ для достаточно больших n. Окончательно $(f, \phi_n) \geq \frac{1}{n} e^{\frac{n}{55}} \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит $(f, \phi_n) \to (f, \phi)$.

11.7. Показать, что

а) последовательность $\{\cos nx\}$ сходится к нулю в пространстве D'.

б) последовательность $\{\frac{\sin nx}{\pi x}\}$ сходится к $\delta(x)$ в пространстве D'.

Решение. а) Для любой $\phi \in D$ имеем

$$(\cos nx, \phi) = \int \cos nx \phi(x)\, dx = -\frac{1}{n} \int \sin nx \phi'(x)\, dx.$$

Отсюда $|(\cos nx, \phi)| \leq \frac{1}{n} \int |\phi'(x)|\, dx \to 0$ при $n \to \infty$.

б) Пусть $\phi \in D$. Так как ϕ финитна и бесконечно дифференцируема, то она заведомо разложима в точке 0 в интеграл Фурье. Поэтому

$$\phi(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \phi(t)\, dt\, d\lambda.$$

Меняя в правой части равенства пределы интегрирования, получаем $\phi(0) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ns}{s} \phi(s) ds$.

11.8. Найти обобщенную производную от функции $f(x) = ln|x|$.

Решение. Пусть $\phi \in D$. Тогда

$$(f', \phi) = -\int ln|x| \phi'(x) dx = -\lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} ln|x| \phi'(x) dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} ln|x| \phi'(x) dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left((\phi(\varepsilon) - \phi(-\varepsilon)) ln\varepsilon + \int_{\setminus[-\varepsilon, \varepsilon]} \frac{\phi(x)}{x} dx \right) = v.p. \int \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

(Мы применили интегрирование по частям.) Таким образом $f' = \mathcal{P}(\frac{1}{x})$.

11.9. Найти обобщенные производные от периодических функций

а) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$,

б) $f(x) = \min\{x, 1-x\}, x \in [0,1]$, $f(x+n) = f(x)$ **при** $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Решение. а) Из теории рядов Фурье известно, что $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ при $x \in (0, 2\pi)$. Поэтому для любой функции $\phi \in D$ имеем

$$(f', \phi) = -(f, \phi') = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} f(x)\phi'(x)dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\phi(2\pi(n+1)) + \phi(2\pi n)) - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \phi(x)dx =$$

$$= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(2\pi n) - \frac{1}{2} \int \phi(x)dx.$$

Таким образом, $f' = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n) - \frac{1}{2}$.

б) Рассуждая аналогично а), получаем

$$(f', \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\int_{n}^{n+\frac{1}{2}} \phi(x)dx - \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} \phi(x)dx).$$

Отсюда

$$f' = \begin{cases} 1, x \in [n, n+\frac{1}{2}), \\ -1, x \in [n+\frac{1}{2}, n+1). \end{cases}$$

11.10. а) Показать, что у любой функции $f \in D'$ существует первообразная $g \in D'$, причем g единственна с точностью до аддитивной постоянной.

б) Показать, что у любой функции $f \in S'$ существует первообразная $g \in S'$, причем g единственна с точностью до аддитивной постоянной.

Решение. а) Пусть $M = \{\xi \in D | \exists \psi \in D : \psi' = \xi\}$. Заметим, что $\xi \in M \iff \xi \in D, \int \xi(t)dt = 0$. При этом функция $\psi \in D : \psi' = \xi$ единственна, $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \xi(t)dt$.

Пусть $\eta \in D$, $\int \eta(t)dt = 1$. Рассмотрим линейное преобразование L_1 пространства D,

$$L_1(\phi)(x) = \phi(x) - \eta(x) \int \phi(t)dt.$$

В силу сказанного выше, $L_1(D) \subset M$. Покажем, что если последовательность $\{\phi_k\}$ сходится к ϕ в D, то последовательность $\{L_1(\phi_k)\}$ сходится к $L_1(\phi)$ в D. Во-первых, существует отрезок $[-R, R]$, вне которого все функции ϕ_k, ϕ и η равны нулю. Значит $\operatorname{supp} L_1(\phi_k) \subset [-R, R]$, $\operatorname{supp} L_1(\phi) \subset [-R, R]$. Во-вторых, $|\int(\phi_k(t) - \phi(t))dt| \leq 2R \max_{[-R,R]} |\phi_k(x) - \phi(x)| \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда для любого $n = 0, 1, \ldots$ последовательность $\{(L_1(\phi_k - \phi))^{(n)}(x)\}$ равномерно сходится к нулю на отрезке $[-R, R]$.

Рассмотрим линейное преобразование L_2 пространства D,

$$L_2(\phi)(x) = \int_{-\infty}^{x} L_1(\phi(t))dt.$$

Рассуждениями, аналогичными предыдущим, получаем, что $L_2(D) \subset D$ и что если последовательность $\{\phi_k\}$ сходится к ϕ в D, то последовательность $\{L_2(\phi_k)\}$ сходится к $L_2(\phi)$ в D.

Наконец покажем, что обобщенная функция $g \in D'$ является первообразной функции $f \in D'$ тогда и только тогда, когда существует постоянная C такая, что

(*) $$(g, \phi) = -(f, L_2(\phi)) + C \int \phi(t)dt$$

для любой $\phi \in D$. Действительно, если $g' = f$, то $(g, \phi) = (g, L_1(\phi)) + (g, \eta) \int \phi(t)dt = -(f, L_2(\phi)) + C \int \phi(t)dt$, где $C = (g, \eta)$. Обратно, формула (*) задает функционал $g \in D'$, производная которого равна f. Таким образом, первообразная любой обобщенной функции $f \in D'$ существует и единственна с точностью до аддитивной постоянной.

б) Пусть $\xi \in S : \int \xi(t)dt = 0$. Покажем, что $\psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \xi(t)dt$ принадлежит S. Пусть $p \in \mathbf{N}$. Тогда $\exists R > 0 : |\xi(t)| < |t|^{-p-2}$ при $|t| > R$. Отсюда $|x^p \psi(x)| \leq |x^p| \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{|t|^{p+2}} = \frac{1}{(p+1)|x|}$ при $x \in (-\infty, R)$ и $|x^p \psi(x)| = |x^p \int_x^{\infty} \xi(t)dt| \leq \frac{1}{(p+1)x}$ при $x \in (R, \infty)$, поэтому $\lim_{x\to\infty} x^p \psi(x) = 0$. Если же $l, p \in \mathbf{N}$, то $x^p \psi^{(l)}(x) = x^p \xi^{(l-1)}(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Далее следует рассуждать как в а), заменяя D на S.

11.11. Пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$. Показать, что всякое решение $y \in D'(\mathbf{R})$ дифференциального уравнения

(*) $$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

является классическим, т.е. принадлежит $C^\infty(\mathbf{R})$.

Решение. Пусть $n = 1$. Тогда $(*)$ имеет вид $y' + a_1 y = 0$. Пусть $z \in D'$, $z(x) = e^{a_1 x} y(x)$. Подставляя $y(x) = z(x)e^{-a_1 x}$ в $(*)$, получаем $z'(x)e^{-a_1 x} = 0$. Поскольку функция $e^{-a_1 x}$ бесконечно дифференцируема и нигде не обращается в 0, то $z'(x) = 0$. Поэтому $z(x) = C$, где $C \in \mathbf{C}$, а $y(x) = Ce^{-a_1 x}$.

Предположим, по индукции, что утверждение верно при $n \leq k$. Покажем, что оно верно при $n = k + 1$. Пусть $\lambda \in \mathbf{C}$ является корнем уравнения $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$, а $y \in D'$ является решением уравнения $(*)$. Представим y в виде $y(x) = z(x)e^{\lambda x}$. Так как

(**) $$y^{(m)} = e^{\lambda x} \sum_{j=0}^{m} C_m^j \lambda^j z^{(m-j)},$$

то подставляя $(**)$ в $(*)$ при $m = 0, \dots n$ и сокращая обе части уравнения на функцию $e^{\lambda x}$, получаем

(***) $$z^{(n)} + b_1 z^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} z' = 0,$$

где $b_1, \ldots, b_{n-1} \in \mathbf{C}$. Последнее уравнение имеет порядок $n-1$ относительно $w = z'$, поэтому w является классическим решением уравнения $w^{(n-1)} + b_1 w^{(n-2)} + \ldots b_{n-1} w = 0$ и, поскольку первообразная определена с точностью до аддитивной постоянной, то z является классическим решением уравнения $(***)$, а y — классическим решением уравнения $(*)$.

11.12. Пусть $L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y$, $a_1, \ldots a_n \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$, а $y(x)$ — классическое решение уравнения $L(y) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y^{(n-1)}(0) = 1$, $y^{(k)}(0) = 0$, $0 \le k < n-1$. Показать, что $f(x) = \theta(x)y(x)$ удовлетворяет в пространстве D' уравнению $L(f)(x) = \delta(x)$. (Напомним, что $\theta(x) = 0$ при $x \le 0$ и $\theta(x) = 1$ при $x > 0$.)

Решение. При $j \in \mathbf{N}$ и $g \in C^\infty(\mathbf{R})$ в силу формулы интегрирования по частям имеем $(\theta(x)g(x))^{(j)} = (\theta(x)g'(x))^{(j-1)} + g(0)\delta^{(j-1)}(x)$. Поэтому, учитывая начальные условия, при $j \le n-1$ получаем $(\theta(x)y(x))^{(j)} = \theta(x)y^{(j)}(x)$, тогда как $(\theta(x)y(x))^{(n)} = \theta(x)y^{(n)}(x) + \delta(x)$. Отсюда $L(f)(x) = \delta(x) + \theta(x)L(y)(x) = \delta(x)$.

11.13. Показать, что: а) $\Delta ln|r| = 2\pi\delta(r)$ в $D'(\mathbf{R}^2)$, б) $\Delta\frac{1}{|r|} = -4\pi\delta(r)$ в $D'(\mathbf{R}^3)$ (здесь r — радиус-вектор в пространствах $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$, $|r|$ — его длина).

Решение. Воспользуемся формулой

$$\int_G (f\Delta g - g\Delta f)dv = \int_{\partial G}(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n})dS,$$

где G — область с гладкой границей ∂G, n — внешняя нормаль к ∂G, $f, g \in C^2(\overline{G})$.

Рассмотрим случай а). Случай б) разбирается аналогично. Пусть $\phi \in D(\mathbf{R}^2)$, $\operatorname{supp}\phi \subset \{|r| < \rho\}$, $G_\varepsilon = \{\varepsilon < |r| < \rho\}$, $f = ln|r|$, $g = \phi$. Так как $\Delta f = 0$ в G_ε, то $\int_{G_\varepsilon} ln|r|\Delta\phi(r)dv = -\int_{|r|=\varepsilon}(ln\varepsilon\frac{\partial\phi(r)}{\partial n} - \phi(r)\frac{\partial \ln|r|}{\partial n})dS$ (здесь $n = \frac{r}{\varepsilon}$ — внешняя нормаль к $|r| = \varepsilon$).

Во-первых $|\int_{|r|=\varepsilon} ln\varepsilon(\frac{\partial\phi(r)}{\partial n})dS| \le 2\pi\varepsilon|ln\varepsilon|\max_{|r|=\varepsilon}|\frac{\partial\phi(r)}{\partial n}| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Во-вторых $(\frac{\partial \ln|r|}{\partial n}) = \frac{1}{\varepsilon}$ на окружности $|r| = \varepsilon$, значит $\int_{|r|=\varepsilon}(\phi(r)\frac{\partial \ln|r|}{\partial n})dS = \frac{1}{\varepsilon}\int_{|r|=\varepsilon}\phi(r)dS \to 2\pi\phi(0)$. Окончательно

$$(\Delta ln|r|, \phi(r)) = (ln|r|, \Delta\phi(r)) =$$

$$= \int_{2} ln|r|\Delta\phi(r)dv = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{G_\varepsilon} ln|r|\Delta\phi(r)dv = 2\pi\phi(0).$$

11.14. Найти преобразование Фурье функции $f \in S'$, если:
а) $f(x) = (\delta)^{(n)}(x)$, $n = 0, 1, \ldots,$
б) $f(x) = x^n$, $n = 0, 1, \ldots,$
в) $f(x) = sign(x)$.

Решение. а) Для любой $\phi \in S$ имеем $(F(\delta), \phi) = (\delta, F(\phi)) = F(\phi)(0) = \int\phi(t)dt$. Отсюда $F(\delta) = 1$. Если $n \in \mathbf{N}$, то $F(\delta^{(n)})(x) = (-ix)^n F(\delta)(x) = (-ix)^n$.

б) Аналогично а), получаем $F^{-1}(\delta^{(n)})(x) = (ix)^n F^{-1}(\delta)(x) = \frac{(ix)^n}{2\pi}$. Отсюда $F(x^n) = 2\pi(-i)^n\delta^{(n)}(x)$.

в) Пусть $\phi \in S$. Тогда

$$(F(sign(x)), \phi) = (sign(x), F(\phi)) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\phi(t)dt + \int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\phi(t)dt =$$

$$= 2i\int_{0}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \sin(xt)\phi(t)dt = 2i \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} dx \int_{-\infty}^{\infty} \sin(xt)\phi(t)dt.$$

Поскольку $\int_{-\infty}^{\infty} \sin(xt)\phi(t)dt$ сходится равномерно относительно x, то

$$\int_{0}^{R} dx \int_{-\infty}^{\infty} \sin(xt)\phi(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{0}^{R} \sin(xt)\phi(t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\frac{1-\cos(Rt)}{t}dt =$$

$$= v.p.\int_{-\infty}^{\infty} (\phi(t)-\phi(0))\frac{1-\cos(Rt)}{t}dt = v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}dt +$$

$$+ v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t}\cos(Rt)dt.$$

Предпоследний из интегралов равен $v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(t)}{t}dt$, а последний стремится к нулю при $R \to \infty$ в силу леммы Римана. Окончательно получаем $F(sign(x)) = 2i\mathcal{P}\frac{1}{x}$.

Список литературы

1. Александров П. С., *Введение в общую теорию множеств и функций*, Гостехиздат, М.-Л., 1948.
2. Владимиров В. С., Жаринов В. В., *Уравнения математической физики*, Физматлит, М., 2000.
3. Гелбаум Б., Олмстед Дж., *Контрпримеры в анализе*, Мир, М., 1967.
4. Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, т.1,2., Мир, М., 1965.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1979.
6. Леонтьева Т. А., *Введение в функциональный анализ*, Сборник задач, Издательство МГУ, 1978.
7. Леонтьева Т. А., *Сборник задач по теории функций действительного переменного*, Издательство МГУ, 1978.
8. Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С., *Задачи по теории функций действительного переменного*, Издательство МГУ, 1997.
9. Люстерник Л. А., Соболев В. И., *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982.
10. Натансон И. П., *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.
11. Рисс Ф, Секефальви-Надь Б., *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979.
12. Рудин У., *Функциональный анализ*, Мир, М., 1975.
13. Теляковский С. А., *Сборник задач по теории функций действительного переменного*, Наука, М., 1980.
14. Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П., *Действительный анализ в задачах*, Физматлит, М., 2005.
15. Халмош П., *Гильбертово пространство в задачах*, Мир, М., 1970.
16. Хелемский А. Я., *Лекции по функциональному анализу*, МЦНМО, М, 2004.
17. Шварц Л., *Математические методы для физических наук*, Мир, М., 1965.